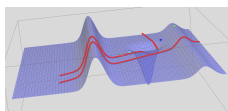
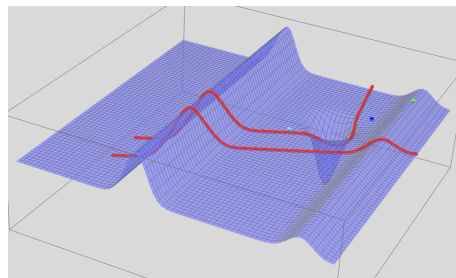
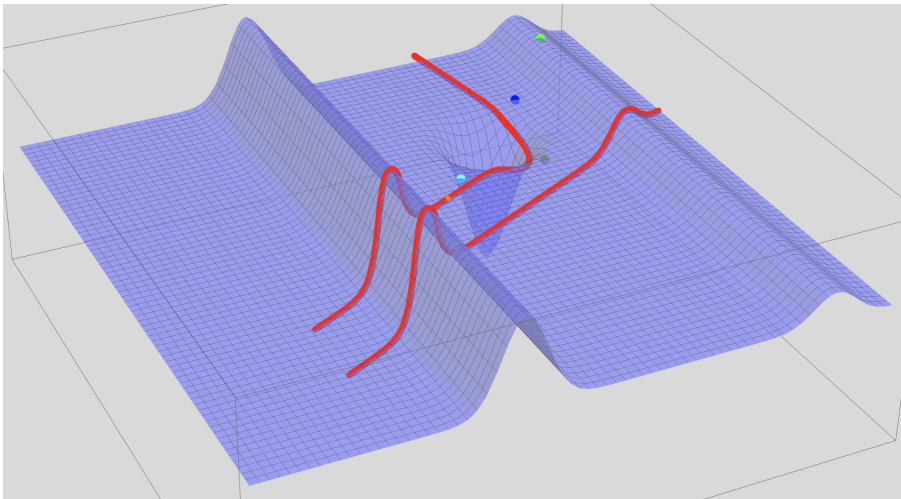


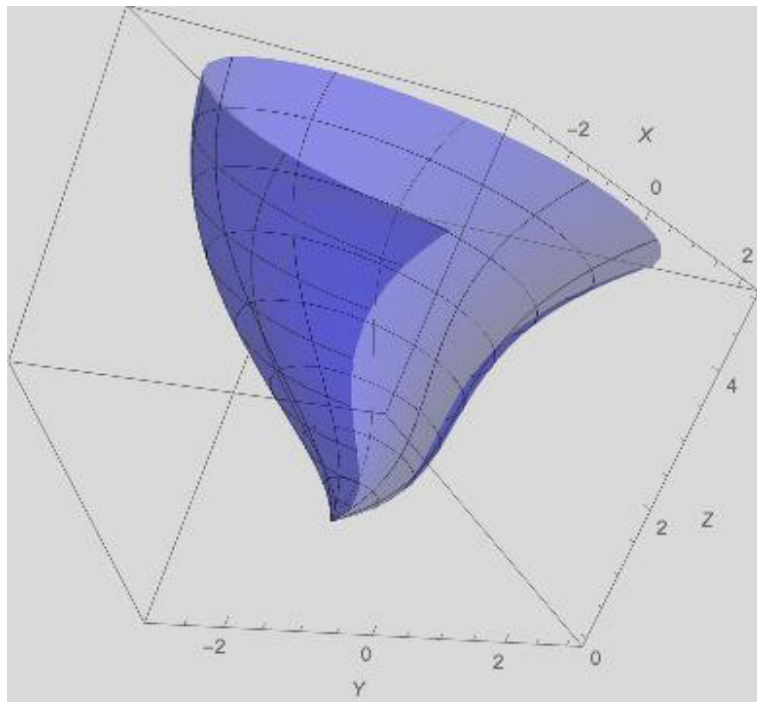
Dra. María de la Paz Suárez Fernández

y Mat. Juan Manuel Márquez Bobadilla

ESTE DOCUMENTO ES UN B O R R A D O R



2



# Capítulo 1

## Preliminares Multivariabiles

En este capítulo, enfatizamos los objetos necesarios para deducir la ecuación de Euler-Lagrange en términos de aproximación de series de potencias de funciones de varias variables. Y obtener la fórmula integral de la longitud de arco para una gráfica de una función y de integral de la longitud de arco de una curva en una superficie en  $\mathbb{R}^3$ .

### 1.1. Expansiones en series

**Teorema 1.1 (Teorema de Taylor de orden  $n$ ).** Sea  $f$  una función clase  $\mathcal{C}^n$ . Si  $f^{(n+1)}$  existe en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Entonces, para  $x_0 \in (a, b)$ , se cumple que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

al término  $R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$  le llamamos el residuo de Taylor de orden  $n$ , el cual tiende a cero cuando  $x$  tiende a  $x_0$ , (ver [?]).

Por otro lado si consideramos a  $x = a + h$  y  $x_0 = a$ , entonces la serie de Taylor toma la siguiente forma

$$f(a + h) - f(a) = f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \dots \quad (1.1)$$

y establecer

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a) = \frac{f''(a)}{2!}h + \frac{f'''(a)}{3!}h^2 + \dots \quad (1.2)$$

Esto permite estimar el error de la aproximación de  $\left\| \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) \right\|$ .

Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  abierto y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave en la posición  $(a, b)^\top \in A$ . entonces similares procesos proporcionan la expansión

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x - a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y - b)^2 + \dots \end{aligned}$$

Vamos a establecer algunas variaciones. Si hacemos la perturbación  $x = a$ ,  $y = b + h$ , se puede llegar a

$$\frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a, b) + \dots \quad (1.3)$$

El proceso anterior también puede ser utilizado en funciones de tres variables, resultándonos en

$$\begin{aligned} f(a, b + h, c + k) - f(a, b, c) &= h \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) + k \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \\ &+ \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b, c) + hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a, b, c) + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a, b, c) + \dots \end{aligned}$$

Sea  $h = k$ , podemos obtener un cociente parecido al de Newton como en los casos anteriores

$$\begin{aligned} \frac{f(a, b + h, c + h) - f(a, b, c)}{h} &= \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) + \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \\ &+ h \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b, c) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a, b, c) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a, b, c) \right) + \dots \end{aligned}$$

desde aquí podemos estimar la aproximación:

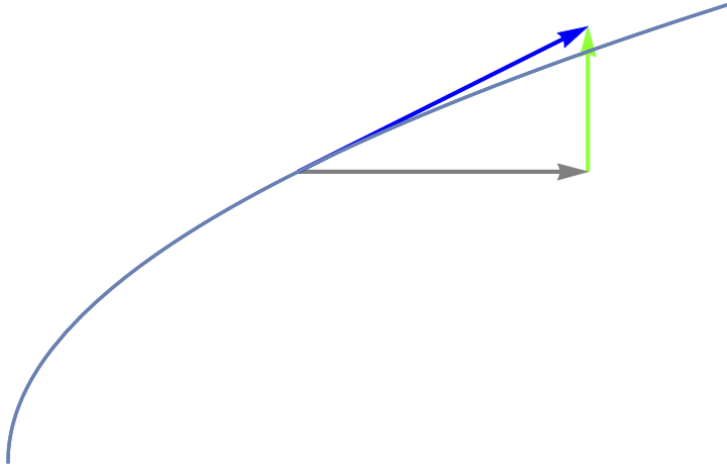
$$\left\| \frac{f(a, b + \varepsilon, c + \varepsilon) - f(a, b, c)}{\varepsilon} - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) + \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \right) \right\|$$

para algún parámetro  $\varepsilon > 0$ , donde apreciamos el papel de la forma cuadrática arriba mencionada.

## 1.2. Longitud de arco de la gráfica de una función

Supongamos que la curva cuya longitud queremos determinar es la gráfica de la función  $y = f(x)$ . Para deducir una fórmula integral para la longitud de la curva, asumamos que  $f$  tiene

derivadas continuas en todo punto de  $[a, b]$ . Entonces una estimación de un tramo de curva es usando el teorema de Pitágoras, como lo sugiere la figura. Entonces  $\Delta\ell = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ .



Así  $\frac{\Delta\ell}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$  y tomando el límite cuando  $\Delta x$  tiende a 0, se tiene  $\frac{d\ell}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ . Por lo tanto

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Observe que si  $P = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$  establece la posición parametrizada por  $x$  entonces aplicando  $\frac{d}{dx}$  obtendremos  $T = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{df(x)}{dx} \end{pmatrix}$ .

Con estos datos en la posición  $P$  a lo largo de una curva se tiene vector  $T$  que es un tangente afín a la posición  $P$  en el instante determinado por  $x$ .

### 1.3. Longitud de una curva en una superficie

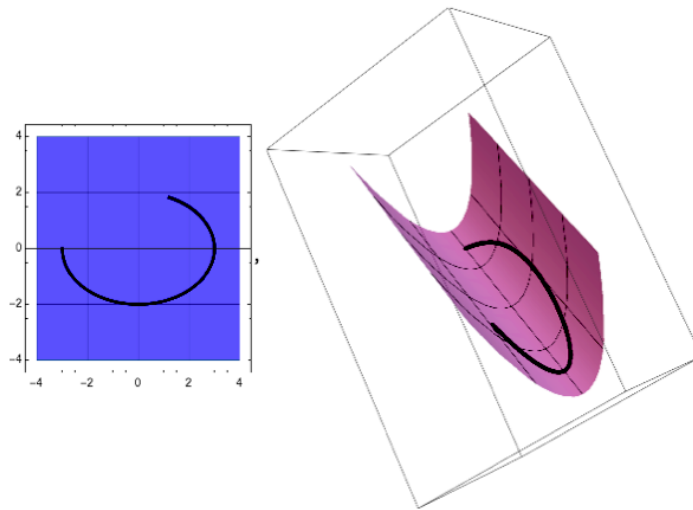
Sea  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un map posible, que asigna  $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ . Y asumimos que  $\phi$  tiene las siguientes propiedades

1.  $\Phi$  es inyectiva.
2. El jacobiano de  $\Phi$ , denotado por  $J(\Phi)$ , existe.
3.  $\text{rango}(J\Phi) = 2$

La composición

$$t \mapsto \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(v(t), w(t)) \\ y(v(t), w(t)) \\ z(v(t), w(t)) \end{pmatrix},$$

donde



*En esta figura vemos, la región de la izquierda, la azul, que contiene una curva que al ser transformada, llega a otra curva en la región roja, y si la curvatura que corresponde a la de un círculo de cierto radio en lo azul, en la superficie roja –que tiene otra curvatura– y esta se transmite a aquella.*

$$J\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$J\Phi(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(a)}{\partial v} & \frac{\partial x(a)}{\partial w} \\ \frac{\partial y(a)}{\partial v} & \frac{\partial y(a)}{\partial w} \\ \frac{\partial z(a)}{\partial v} & \frac{\partial z(a)}{\partial w} \end{bmatrix},$$

el cual representa la aproximación lineal a  $\Phi$  en  $a$ .

**Observación 1.2** *Tenemos*

a) *Para una función  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación afín definida por  $L(\xi) = J\Phi(a)(\xi - a) + \Phi(a)$  es una función que parametriza al plano tangente en la posición  $p$  en la superficie.*

b)  *$JL = J\Phi(a)$ , por definición de  $L$*

Por otro lado, si simbolizamos con  $\Sigma$  a la superficie con  $T_p\Sigma$  simbolizamos el espacio tangente a la superficie en el punto  $p$  y esta dado por

$$T_p\Sigma := \text{gen}\{ \partial_1, \partial_2 \},$$

es decir, si  $X \in T_p\Sigma$  entonces  $X = X^1\partial_1 + X^2\partial_2$ , una cierta combinación lineal que cambia según sea la  $p$ , cuando este cambia el vector  $X$  cambia y cambian los básicos  $\partial_i$  y también los escalares  $X^i$ , es decir son funciones escalares no necesariamente constantes reales.

Sean  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  y  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ . Consideremos la siguiente composición de funciones

$$[a, b] \xrightarrow{\alpha} \Omega \xrightarrow{\Phi} \Sigma$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(v, w) \\ y(v, w) \\ z(v, w) \end{pmatrix}.$$

Consideremos la curva  $c : [a, b] \rightarrow \Sigma$  dada por  $C = \Phi \circ \alpha$ . Es decir

$$C(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Esto permite establecer que la longitud de la curva  $C$  es

$$\ell = \int \|C'\| = \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt. \quad (1.4)$$

Puesto que deseamos hacer el cálculo de la longitud con las coordenadas en la superficie, entonces usamos  $C = \Phi \circ \alpha$  y aplicando la regla de la cadena

$$C' = [J\Phi(\alpha)]\alpha'.$$

Observe además que  $\alpha = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = ve_1 + we_2$ .

Luego  $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$ . Por tanto

$$C'(t) = v'(t)J\Phi(t)e_1 + w'(t)J\Phi(t)e_2,$$

sucintamente es  $C' = v'\partial_1 + w'\partial_2$ , donde vemos la forma que  $C'$  es interpretado con el uso del espacio tangente.

Con esto podemos calcular  $\|C'\|$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} \|C'\|^2 &= C' \cdot C' \\ &= \sqrt{Ev'^2 + 2Fv'w' + Gw'^2}, \end{aligned}$$

donde es clásico abreviar con

$$E = \partial_1 \cdot \partial_1 \quad F = \partial_1 \cdot \partial_2 \quad G = \partial_2 \cdot \partial_2.$$

los llamados coeficientes del tensor métrico. Por lo cual podemos reescribir (3.20) de la siguiente manera

$$\|C'\| = C' \cdot C' = \sqrt{Ev'^2 + 2Fv'w' + Gw'^2},$$

así el funcional de longitud de una curva sobre una superficie es

$$\ell = \int \|C'\| = \int \sqrt{Ev'^2 + 2Fv'w' + Gw'^2} dt.$$

el puede transformar en el caso que eligieramos por ejemplo  $v = t$  en

$$\ell = \int \|C'\| = \int \sqrt{E + 2Fw' + Gw'^2} dv. \tag{1.4.1}$$



# Capítulo 2

## Ecuación de Euler-Lagrange

Usaremos el teorema fundamental del cálculo variacional por deducir un criterio que permita establecer donde buscar, para caracterizar los datos críticos consistentes en representar datos extremos  $(x, y(x), \frac{dy}{dx})$ , así como el problema de la braquistócrona, la identidad de Beltrami, utilizaremos algunos principios clave de la geometría diferencial de superficies en términos de la derivada covariante para formular las ecuaciones que conducen al problema de las geodésicas en superficies.

En emplearemos la ecuación de Euler-Lagrange y dos aplicaciones, en particular para resolver el problema de la braquistócrona y el calculo del funcional de longitud de una curva en una superficie.

También daremos un ejemplo en el que se muestra el calculo de una géodesica en el cono.

### 2.1. Deducción de la Ecuación

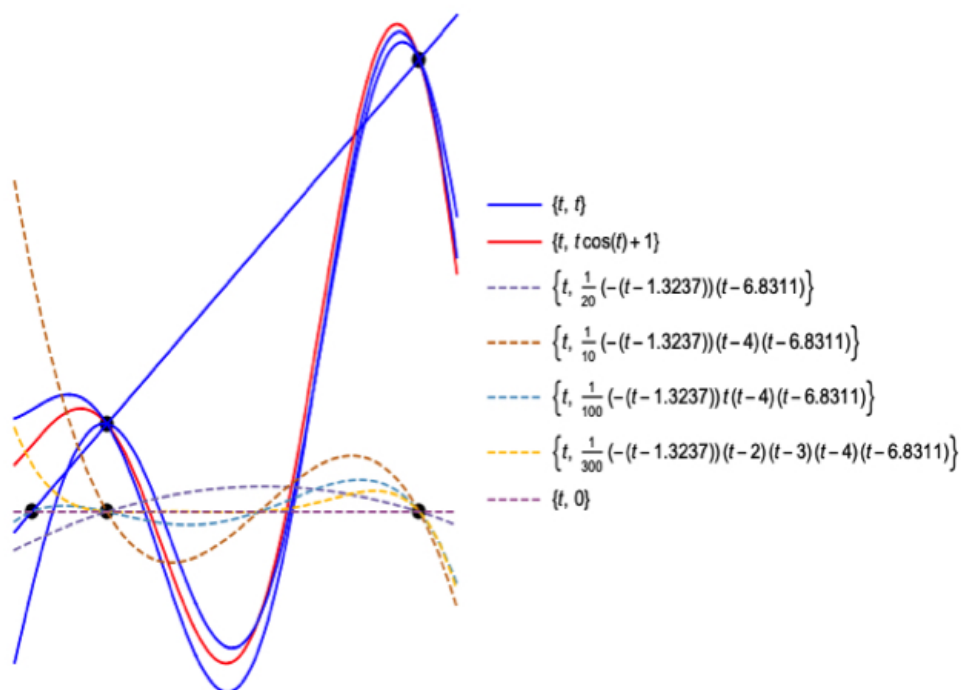
La integral  $\int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx$ , sirve para calcular la longitud de arco de una curva y es un primer ejemplo de cómo con una integral modelamos el cálculo de la longitud.

Más general las integrales del estilo  $\int_a^b f(x, y, y') dx$  son usadas para modelar otros problemas geométricos y de la física.

Para estudiarlas, consideraremos una perturbación de la forma

$$\int_a^b f(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h') dx.$$

Vamos a construir otra curva diferente a  $y$  dada por  $y(x) + \varepsilon h(x)$  donde  $h$  cumple  $h(a) = h(b) = 0$ . Con ello la nueva curva coincide en los extremos  $a, b$  con la  $y$ . Lo anterior se ilustra en la siguiente gráfica



Ahora, haciendo la expansión en serie de Taylor para  $f(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h')$  se tiene

$$f(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h') = f(x, y, y') + \varepsilon h \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') + \varepsilon h' \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y') + O(\varepsilon^2),$$

donde  $O$  representa a los términos de la serie con potencias de  $\varepsilon^2$  o más.

Factorizando  $\varepsilon$  y despejando obtenemos

$$\frac{f(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h') - f(x, y, y')}{\varepsilon} = h \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') + h' \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y') + O(\varepsilon),$$

integrando resulta en

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{f(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h') - f(x, y, y')}{\varepsilon} dx &= \int_a^b \left( h \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') + h' \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y') + o(\varepsilon) \right) dx \\ &= \int_a^b h \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') dx + \int_a^b h' \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y') dx + \int_a^b o(\varepsilon) dx, \end{aligned}$$

ahora, aplicando integración por partes a la segunda integral de la igualdad (3.3) se tiene que

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} h' dx = \frac{\partial f}{\partial y'} h \Big|_a^b - \int_a^b h \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} dx,$$

sin embargo, como  $h(a) = h(b) = 0$ , nos resulta

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} h' dx = - \int_a^b h \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} dx.$$

Si sustituimos arriba, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{f(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h')}{\varepsilon} dx &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} h dx - \int_a^b h \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} dx + \int_a^b O(\varepsilon) dx \\ &= \int_a^b h \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx + \int_a^b O(\varepsilon) dx \\ &= \int_a^b h \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx + \varepsilon \int_a^b R dx. \end{aligned}$$

Podemos aplicar límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y tener

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h')}{\varepsilon} dx = \int_a^b h \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

Sea

$$\frac{\delta A}{\delta \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h')}{\varepsilon} dx.$$

entonces podemos escribir

$$\frac{\delta A_\varepsilon}{\delta \varepsilon} = \int_a^b h \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx,$$

Si queremos que los datos  $(x, y, y')$  sean críticos debemos exigir que  $\frac{\delta A_\varepsilon}{\delta \varepsilon} = 0$  y esto implica que

$$\int_a^b h \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0$$

para toda  $h$ , pero esto es si

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

La cual es llamada *La ecuación de Euler-Lagrange* y es una condición necesaria para determinar un conjunto de datos críticos de la funcional  $A = \int_a^b f(x, y, y') dx$ .

## 2.2. Longitud de una línea.

Si  $f(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$ , entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

sustituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange, obtenemos

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c,$$

Que despejando dará

$$y' = \sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}} = K.$$

A partir de la cual obtenemos

$$y(x) = Kx + L,$$

donde  $y$  representa una recta de pendiente  $K$  e intersección  $L$ . En este caso, lo que minimiza la longitud de la gráfica de una función se representa con la distancia euclídea usual.

## 2.3. La Braquistócrona

La energía cinética y la energía potencial de un cuerpo, en este caso una partícula, pueden ser calculadas, respectivamente, con  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$  y  $E_p = -mgy$  donde  $y$  es la altura,  $m$  es la masa de la partícula y  $g$  es cota de gravedad.

$$E_c + E_p = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0, \tag{2.2}$$

$$m \left( \frac{1}{2}v^2 - gy \right) = 0. \tag{2.3}$$

Si y sólo si  $\frac{1}{2}v^2 - gy = 0$ , por lo cual

$$v = \sqrt{2gy}. \tag{2.4}$$

Ahora, ésta es la ecuación de una curva que queremos describir con la longitud de arco. Si  $S$  es la distancia, entonces  $v = \frac{dS}{dt}$ , donde  $t$  es el tiempo

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{2gy}, \tag{2.5}$$

$$dS = \sqrt{2gy} dt. \tag{2.6}$$

El problema de la braquistócrona consiste en minimizar el tiempo de recorrido de la partícula, por lo cual buscaremos minimizar  $t$ , recordando que  $y(t)$  es la altura pero depende del parámetro. Así,

$$dt = \frac{dS}{\sqrt{2gy}}. \tag{2.7}$$

Como  $S$  es la distancia,  $dS = \sqrt{1 + y'^2} dx$ , sustituyendo en (3.13) tenemos

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx, \quad (2.8)$$

$$t = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx. \quad (2.9)$$

Si  $x' = \frac{dx}{dy}$ , entonces  $dx = x' dy$  de manera similar  $y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow y'^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ . Sustituyendo en (3.15)

$$\begin{aligned} t &= \int_0^a \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}} \left(\frac{dx}{dy}\right) dy \\ &= \int_0^a \sqrt{\frac{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dy}\right)^2}{2gy}} dy. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Si consideramos  $x = x(y)$  y derivamos con respecto de  $x$  nos resulta  $1 = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dx}$  la cual podemos sustituir en (3.16)

$$t = \int_0^a \sqrt{\frac{x'^2 + 1}{2gy}} dy = \int_0^a F(y, x, x') dy. \quad (2.11)$$

La ecuación de Euler-Lagrange es en este caso solo  $\frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial x'} = 0$  luego  $\frac{\partial F}{\partial x'} = c$ . Pero

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{1}{\sqrt{2gy} \sqrt{x'^2 - 1}}$$

y así

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + 1}} = c.$$

Si  $c_1 = 2gc^2$ , podemos reescribir como

$$\frac{x'}{\sqrt{y} \sqrt{x'^2 + 1}} = \sqrt{c_1}$$

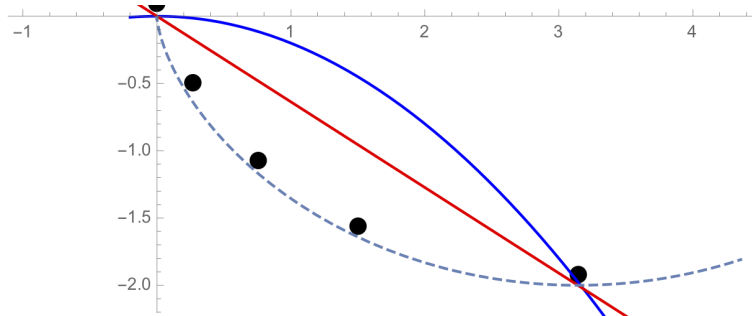
$$x' = \sqrt{c_1 y (x'^2 + 1)},$$

$$x'^2 = c_1 y x'^2 + c_1 y,$$

$$x'^2 (1 - c_1 y) = c_1 y,$$

$$x' = \sqrt{\frac{c_1 y}{1 - c_1 y}}.$$

...



## 2.4. Geodésica del cono

Es posible generalizar para funcionales que provienen de calcular longitudes de curvas montadas en una superficie:

Este funcional es

$$\int_I \sqrt{Ev'^2 + 2Fv'w' + Gw'^2} dt, \quad *$$

donde los coeficientes (dependientes de la superficie) forman el tensor métrico de la superficie.

Y en un caso más general los funcionales pueden ser

$$\int_I \mathcal{L}(t, v, v', w, w') dt$$

uno es conducido a un par

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v'} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w'} = 0$$

§§ Pero...

La integral \* arriba, puede ser simplificada con el truco en el cual, si buscamos una curva, es suficiente uno de los dos parámetros  $v$  o bien  $w$ . Si hicieramos  $v = t$  por ejemplo, lograríamos que \* arriba se convierta en

$$\int_I \sqrt{E + 2Fw' + Gw'^2} dv, \quad **$$

y así, nuestra condición necesaria para un extremo es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} - \frac{d}{dv} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w'} = 0$$

Encontraremos la geodésica del cono con la ecuación  $z^2 = x^2 + y^2$ . Utilizando coordenadas cilíndricas, obtenemos

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta, \\y &= \rho \sin \theta, \\z &= \rho.\end{aligned}$$

Con ellas  $\phi(\rho, \theta)^\top = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho)^\top$  y entonces podemos obtener

$$\begin{aligned}J\phi &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Queremos minimizar la integral

$$\ell = \int_I \sqrt{\rho'^2 E + 2\rho'\theta'F + \theta'^2 G} dt$$

por lo que es necesario encontrar las primeras formas fundamentales para  $\phi$

$$E = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = 2$$

$$G = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \rho^2$$

entonces

$$\ell = \int \sqrt{2 \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} dt,$$

si  $\rho = t$

$$\ell = \int \sqrt{2 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2} d\rho$$

cuya dependencia es  $\mathcal{L}(\rho, \theta')$  y así por lo calculamos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} = \frac{\rho^2 \theta'}{\sqrt{2 + \rho^2 \theta'^2}},$$

$$\frac{d}{d\rho} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} \right) = 0,$$

$$\frac{d}{d\rho} \left( \frac{\rho^2 \theta'}{\sqrt{2 + \rho^2 \theta'^2}} \right) = 0$$

por lo cual

$$\frac{\rho^2 \theta'}{\sqrt{2 + \rho^2 \theta'^2}} = k.$$

Despejando para  $\theta'$  llegamos a que

$$\theta' = \frac{\sqrt{2}k^2}{\rho(\rho^2 - k^2)}$$

entonces

$$\begin{aligned} \theta &= -\alpha + \sqrt{2} \int \frac{k d\rho}{\rho(\rho^2 - k^2)}, \\ \frac{\theta + \alpha}{\sqrt{2}} &= \arccos \left( \frac{k}{\rho} \right), \\ \frac{k}{\rho} &= \cos \left( \frac{\theta + \alpha}{\sqrt{2}} \right), \\ \rho &= k \sec \left( \frac{\theta + \alpha}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Sustituyendo la ecuación (3.21) en  $\phi$ , obtenemos

$$\phi \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \sec \left( \frac{\theta + \alpha}{\sqrt{2}} \right) \cos \theta \\ k \sec \left( \frac{\theta + \alpha}{\sqrt{2}} \right) \sin \theta \\ k \sec \left( \frac{\theta + \alpha}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Ahora, tomamos dos puntos en el cono

$$\begin{aligned} A &= \phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \sec \left( \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right) \\ 0 \\ k \sec \left( \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix}, \\ B &= \phi \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \sec \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{\sqrt{2}} \right) \\ k \sec \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo que podemos decir que

$$2 = k \sec \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{\sqrt{2}} \right),$$



$$1 = k \sec \left( \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right).$$

Despejando para  $k$ , tenemos

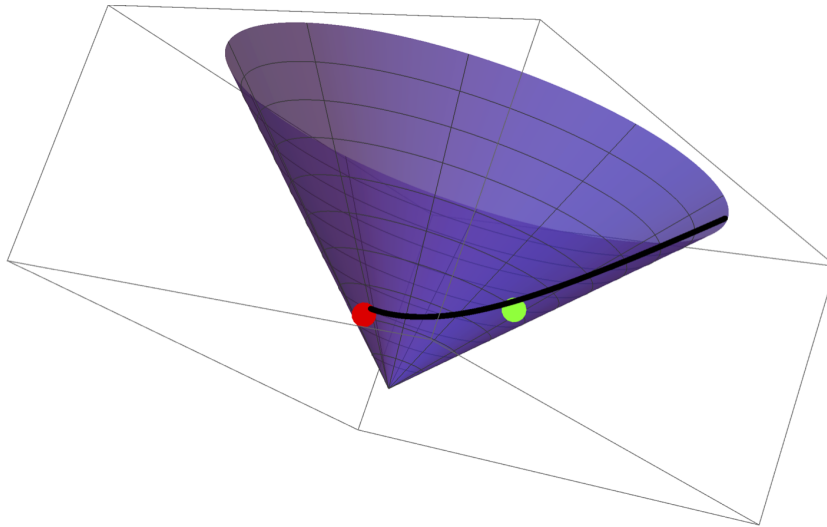
$$k = \cos \left( \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right)$$

y

$$\begin{aligned} k &= 2 \cos \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 2 \left( \cos \frac{\pi}{\sqrt{8}} \cos \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \sin \frac{\pi}{\sqrt{8}} \sin \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

Utilizando álgebra podemos encontrar los valores de  $k$  y  $\alpha$ , llegando a

$$\begin{aligned} k &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{\sqrt{8}}}{\sqrt{\left( 2 \cos \frac{\pi}{\sqrt{8}} - 1 \right) + 4 \sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{8}}}}, \\ \alpha &= \sqrt{2} \arccos k. \end{aligned}$$



Estos valores se aplican en

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} k \sec \left( \frac{\theta + \alpha}{\sqrt{2}} \right) \cos \theta \\ k \sec \left( \frac{\theta + \alpha}{\sqrt{2}} \right) \sin \theta \\ k \sec \left( \frac{\theta + \alpha}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix},$$

para luego "trazar" la curva desde  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  a  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

# Capítulo 3

## Ejercicios

1. Extremo de  $A = \int_{-1}^0 (12xy - y'^2)dx$  con  $y(-1) = 1$  y  $y(0) = 0$ .
2. De  $A = \int_1^2 (y'^2 + 2yy' + y^2)dx$  con  $y(1) = 1$  y  $y(2) = 0$ .
3.  $A = \int_1^2 \sqrt{y'(1+y'^2)}dx$  con  $y(0) = y(2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
4.  $A = \int_0^1 yy'^2 dx$  con  $y(0) = 1$  y  $y(1) = 4^{1/3}$ .
5.  $A = \int_0^1 (y + \lambda\sqrt{1+y'^2})dx$  con  $y(0) = 1$  y  $y(1) = 4^{1/3}$ .
6.  $A = \int_1^9 (y^2 + \lambda\sqrt{1+y'^2})dx$  condicionada a que  $\int_1^9 \sqrt{1+y'^2}dx = 300$
7. Quizás usando la transformación de Beltrami (como el usado en la integral cuya solución es la braquistocrona) encuentra extremos de las siguientes:
  - a)  $\int_I \sqrt{1+y^2y'^2}dx$ .
  - b)  $\int_I (w^2 + w'^2)dv$ .
  - c)  $\int_I \frac{\sqrt{s^2+s'^2}}{s} dt$ .
  - d)  $\int_I \sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta} d\phi$ .
  - e)  $\int_I \frac{yy'^2}{\sqrt{1+yy'}} dx$ .
- 8). Para  $y = y(x)$  definimos

$$y \mapsto A(y) = \int_{-1}^1 \frac{x}{1+y^2} dx$$

entonces, por ejemplo para  $y(x) = 1 + x$  tenemos

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1 + (1+x)^2} dx = \ln \sqrt{5} - \arctan 2$$

Existe  $y_0$  para la cual  $A(y_0)$  es extrema?

9). Cuando es suficiente la ecuación de E-L.

10). Encuentra las geodésicas en una esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

### 3.1. Transformación de Legendre

Si  $F = F(x, y, z)$  entonces obtenemos  $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$  tanto como

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx}$$

Pero si  $z = y'$  y  $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$  entonces  $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}$  y así

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx}$$

esto es

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy}{dx} \right)$$

y por lo tanto

$$\frac{d}{dx} \left( F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Cuando  $F$  no depende de  $x$ , i.e.  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  entonces

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

conocida como la forma de Legendre de la ecuación de E-L.

—

### 3.2. El problema Isoperimétrico

Sea  $y = y(x) \geq 0$  en un intervalo finito. Extremice  $\int_I y dx$  condicionado a que  $\int_I \sqrt{1 + y'^2} dx$  fuera una constante mayor que la longitud del intervalo  $I$ .

### 3.3. Clairaut (ejemplo 8, pag. 120, Elsgoltz)

Demostrar que para una superficie de revolución es constante el producto del radio del paralelo por el seno del ángulo entre la geodésica y el meridiano.

### 3.4. Sobre fronteras móviles

TEOREMA (pag. 122, Elsgoltz)

Supongamos que en la curva  $\gamma_0$  con  $\tilde{y}(x)$  se alcanza el extremo de  $\int_I \mathcal{L}(x, y, y') dx$  entre todas las curvas de clase  $C^1$  que unen dos puntos arbitrarios de dos curvas  $y = \varphi(x)$  y  $y = \psi(x)$ .

Entonces la curva  $\gamma_0$  es una extremal y en las orillas  $A(x_0, y_0)$ ,  $B(x_1, y_1)$  de la curva  $\gamma_0$  se cumplen las (llamadas) condiciones de transversalidad:

$$\left( \mathcal{L} + (\varphi - \tilde{y}') \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) \Big|_{x_0} = 0,$$

$$\left( \mathcal{L} + (\psi - \tilde{y}') \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) \Big|_{x_1} = 0.$$

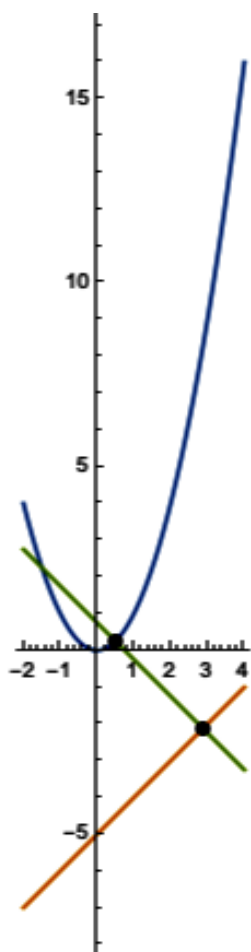
§§ (Ejemplo 1, pag. 122, Elsgoltz).

Hallar las condiciones de transversalidad de

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y) e^{\arctan y'} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

§§ (Ejemplo 2, pag. 122 Elsgoltz).

Encuentre la distancia de la parábola  $y = x^2$  y la línea  $y = x - 5$ .



## Referencias

- 1). Boas, Mathematical Methods in the Physical Sciences, John Wiley, 3rd Ed. 2006.
- 2). Courant - Hilbert, Methods of the Mathematical Physics, Interscience Pub. 1966.  
Spiegel, Análisis Vectorial, McGraw, 1950.
- 3) Elsgolts. Differential Equations and The Calculus of Variations. Mir.1977.
- 4) Hubbard-Hubbard. Vector Calculus, Linear Algebra and Differential Forms. Prentice Hall.1998.

5) Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier. 2005.

6) Bressoud. *Second Year Calculus*. Springer Undergraduate Texts. 1991.

7) Ligas en línea (que están en constante evolución) indicadas por el instructor.

8) Notas del Curso.

*Este ejercicio es porque queremos mostrar el uso de prácticas vectorizantes ultra - higiénicas a la hora de combinar álgebra, geometría y análisis.*

*Esta rama, este territorio, mencionado fuera de las matemáticas formales, debe ser identificado con lo derivado – hasta nuestro tiempo– de la antigua ciencia denominada cálculo vectorial, análisis vectorial o cálculo avanzado... pero... ahora esto se llama geometría diferencial y ésta está*

*t e r a - u l t r a - f o r m a l i z a d a*  
*plenamente.*

*Es un experimento para ser desarrollado, con respecto al conocimiento y popularización de las técnicas del cálculo variacional, durante la semana V de verano de las matemáticas en el CUCEI de la U de G.*

*Imprimirlo y usarlo como arena donde tomar notas o hacer correcciones o anotar sugerencias "for improving" se vale.*

*Este documento es para ser discutido incluso criticado – constructivamente :)*



# Índice general

1. Preliminares Multivariabales	3
1.1. Expansiones en series . . . . .	3
1.2. Longitud de arco de la gráfica de una función . . . . .	4
1.3. Longitud de una curva en una superficie . . . . .	5
2. Ecuación de Euler-Lagrange	9
2.1. Dedución de la Ecuación . . . . .	9
2.2. Longitud de una línea. . . . .	11
2.3. La Braquistócrona . . . . .	12
2.4. Geodésica del cono . . . . .	14
3. Ejercicios	19
3.1. Transformación de Legendre . . . . .	20
3.2. El problema Isoperimétrico . . . . .	20
3.3. Clairaut (ejemplo 8, pag. 120, Elsgoltz) . . . . .	21
3.4. Sobre fronteras móviles . . . . .	21