1 de julio de 2022 — Mtro. Martín Muñoz Chávez, Mtro. Ricardo Águila Gómez

1. SERIE DE TAYLOR Y MACLAURIN

Ciertas funciones infinitamente diferenciables se pueden representar mediante series de potencias conocidas como las series de Taylor.

DEFINICIÓN 1

Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en algún intervalo que contenga a x_0 como un punto interior. De esta forma, la serie de Taylor generada por f en $x = x_0$ es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

La serie de Maclaurin de f es la serie de Taylor generada por f en $x = 0$, esto es,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Algunas de las series de Taylor utilizadas con mas frecuencia son:

1. $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$
2. $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1$
3. $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < \infty$
4. $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |x| < \infty$
5. $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty$
6. $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1$
7. $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1$
8. $\sinh x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |x| < \infty$
9. $\cosh x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty$

TEOREMA 1

Suponga que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

converge para $|x - x_0| < R$, $R > 0$. De esta forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$$

converge para $|x - x_0| < R$ y

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} + C$$

para $|x - x_0| < R$.

EJERCICIO 1. Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{1 + x^2}$$

por series de potencias.

Solución. Escribamos la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ como una serie de potencias.

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Utilizando el teorema (1) sustituyendo en la integral e integrando término a término, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1 + x^2} &= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \\
&= \int \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n}\right) dx \\
&= \int dx - \int x^2 dx + \int x^4 dx - \int x^6 dx + \cdots + (-1)^n \int x^{2n} dx \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C, \quad |x| \leq 1 \\
&= \arctan x + C.
\end{aligned}$$

□

EJERCICIO 2. Estime $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2) dx$ con un error menor que 0.001.

Solución. Lo primero que tenemos que hacer es determinar la serie para $\operatorname{sen} x^2$, esto lo obtenemos sustituyendo a x^2 en la serie de Maclaurin del seno.

$$\operatorname{sen} x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

Ahora utilizando el teorema (1) sustituyendo en la integral e integrando término a término, tenemos.

$$\int \operatorname{sen} x^2 dx = \int \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} \right) dx \\
&= \int x^2 dx - \frac{1}{3!} \int x^6 dx + \frac{1}{5!} \int x^{10} dx - \frac{1}{7!} \int x^{14} dx + \frac{1}{9!} \int x^{18} dx - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int x^{4n+2} dx \\
&= \frac{x^3}{3!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \frac{x^{19}}{19 \cdot 9!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!} + C \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!} + C
\end{aligned}
$$

Como en este caso la integral esta definida, solo hay que tomar algunos terminos de la serie y aplicar el TFC para aproximar su valor, así

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \operatorname{sen} x^2 dx &\approx \left[\frac{x^3}{3!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \frac{x^{19}}{19 \cdot 9!} - \cdots \right] \Bigg|_0^1 \\
&\approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \frac{1}{15 \cdot 7!} + \frac{1}{19 \cdot 9!} - \cdots \\
&\approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} + \frac{1}{6894720} - \cdots \\
&= 0{,}310268303.
\end{aligned}
$$

Con un error aproximadamente de $1{,}08 \times 10^{-9}$.

$\square$

EJERCICIO 3. Pruebe el valor de las siguientes integrales utilizando series.

(1) $\displaystyle\int_a^1 \frac{e^x}{x} dx = \left(\ln x + x + \frac{1}{2 \cdot 2!} x^2 + \frac{1}{3 \cdot 3!} x^3 + \cdots \right) - \left(\ln a + a + \frac{1}{2 \cdot 2!} a^2 + \frac{1}{3 \cdot 3!} a^3 + \cdots \right).$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}.$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) \frac{1}{x^3} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \right) \frac{1}{x^5} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \right) \frac{1}{x^7} - \cdots + C.$

(4) $\displaystyle\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$

(5) Pruebe que $\arcsin x = \displaystyle\binom{2n-1}{n} \frac{1}{2^{2n-1}(2n+1)}.$

2. FUNCIÓN GAMMA

Una función especial es una función matemática particular, que por su importancia en el campo del análisis matemático, análisis funcional, la física y otras aplicaciones, posee nombres y designaciones mas o menos establecidos.

Para calcular algunas integrales, se hace el uso de algunas de las funciones especiales y en este caso en particular trataremos dos de ellas que son la función Gamma y Beta.

DEFINICIÓN 2

La función gamma propuesta por Euler que se denota por $\Gamma(n)$, se define de la siguiente manera

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$$

que es convergente para $n > 0$.

PROPOSICIÓN 2. La función gamma de Euler tiene las siguientes propiedades.

(i) Si $n \geq 1$, entonces la integral $\Gamma(n)$ solo es impropia en $x = +\infty$ y es convergente.

(ii) Si $0 < n < 1$, entonces $\Gamma(n)$ es impropia en $x = 0$ y en $x = +\infty$, pero también es convergente.

(iii) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, para todo $n > 0$.

(iv) $\Gamma(n+1) = n!$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

(v) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

EJERCICIO 4. Utilice la función Gamma para probar el valor de las siguientes integrales.

(1) $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sqrt{y}e^{-y^3}dy = \frac{1}{3}\sqrt{\pi}$.

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} 3^{-4z^2}dz = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\ln 3}}$.

(4) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^n}dx = \frac{1}{na^{m+1}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$.

(5) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}dx = \sqrt{\pi}$.

(6) $\displaystyle\int_0^{1} x^m \ln^n x dx = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n-1}}$.

(7) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}t^{\alpha}dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \;\; \alpha > -1$.

3. FUNCIÓN BETA

DEFINICIÓN 3

La función Beta se denota por $\mathrm{B}(m,n)$ y se define como

$$\mathrm{B}(m,n) = \int_0^{1} x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

que es convergente cuando $n > 0$ y $m > 0$.

EJERCICIO 5. Pruebe que la función Beta es simétrica.

La función Beta se puede representar de las siguientes maneras:

(1) $\mathrm{B}(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta d\theta$ Forma trigonométrica.

(2) $\mathrm{B}(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt$ Forma no acotada.

PROPOSICIÓN 3. La función beta se relaciona con la función gamma de la siguiente manera

$$\mathrm{B}(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

EJERCICIO 6. Utilice la función Beta para probar el valor de las siguientes integrales.

(1) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}} = \pi.$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x dx = \frac{8}{315}.$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x}}{(e^{3x}+1)^2} dx = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi.$

(5) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$

(6) $\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{a^6}{32}\pi.$

(7) Calcule $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ utilizando a la función Beta.

4. Derivación bajo el signo integral (Truco de Feynman)

La técnica de Feynman o derivación bajo el signo integral, es un método que nos permite encontrar el valor de una integral definida. Para esto podemos introducir un nuevo factor α a partir del cual lo usaremos para diferenciar nuestra integral.

Teorema 4

Sea una integral del la forma

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt \quad \text{con} \quad -\infty < a(x), b(x) > \infty,$$

con a y b funciones derivables, entonces la derivada de la integral se puede expresar como

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right) = f(x,b(x))\cdot\frac{db}{dx} - f(x,a(x))\cdot\frac{da}{dx} + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt.$$

Demostración. Sea la función $\varphi(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx$, donde a y b son funciones de α que tienen incrementos de Δa y Δb cuando α tiene un incremento $\Delta\alpha$, así

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \varphi(\alpha+\Delta\alpha) - \varphi(\alpha)\\ &= \int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx - \int_a^b f(x,\alpha)dx\end{aligned}$$

Reescribiendo estas integrales, partiendolas por intervalos y agrupando obtenemos:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \int_{a+\Delta a}^{a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx + \int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx + \int_b^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx - \int_a^b f(x,\alpha)dx\\ &= -\int_a^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx + \int_a^b \left[f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)\right]dx + \int_b^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx\end{aligned}$$

Utilizando el teorema del valor medio para la integral $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f'(\xi)$ con $a < \xi < b$ en la primera y última integral tenemos:

$$\Delta\varphi = -\Delta a f(\xi_1, \alpha+\Delta\alpha) + \int_a^b \left[f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)\right]dx + \Delta b f(\xi_2,\alpha+\Delta\alpha)$$

Dividiento esta ultima expresión por $\Delta\alpha$:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\alpha} = \frac{\Delta b}{\Delta\alpha} f(\xi_2,\alpha+\Delta\alpha) - \frac{\Delta a}{\Delta\alpha} f(\xi_1,\alpha+\Delta\alpha) + \int_a^b \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}dx$$

Si $\xi_1 \to a$ y $\xi_2 \to b$, entonces $\Delta\alpha \to 0$ y por la definición de derivada tenemos:

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{db}{d\alpha} f(b,\alpha) - \frac{da}{d\alpha} f(a,\alpha) + \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,\alpha)dx$$

□

OBSERVACIÓN. Primero se tiene que tener en cuenta que α es una constante arbitraria con respecto a la integral. Dado que la integral definida será un número que depende de alfa, podemos tratar esta integral como una función de alfa. El esquema del enfoque es el siguiente:

1. Considere la integral como una función f de alfa.
2. Calcule la integral para algún valor particular conveniente de alfa. Necesitaremos esto para el último paso.
3. Diferenciar la integral con respecto a alfa.
4. Calcule la integral definida con respecto a x.
5. Integrar indefinidamente con respecto a α.
6. Utilice el hecho de que $f(\alpha) = m$ para calcular el valor de la constante de integración.

EJERCICIO 7. Resuelva las siguientes integrales utilizando la técnica de Feynman

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi.$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx = \frac{\pi \ln 2}{8}.$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}.$

(5) $\displaystyle\int_0^{\infty} x e^{-ax} \cos \lambda x dx = \frac{a^2 - \lambda^2}{(a^2+\lambda^2)^2}.$

(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2-1}{\ln t} dt = \ln 3.$