El teorema de Arzelà-Ascoli y el significado de la compacidad

Dra. Celia Avalos Ramos & Dr. Isidro H. Munive Lima

30 de junio de 2022

Introducción

Los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son cerrados y acotados tienen una propiedad fundamental: cualquier sucesión de puntos en ellos contiene una subsucesión convergente. En general, no cualquier subconjunto cerrado y acotado de un espacio métrico tiene esta propiedad. A los subconjuntos que la tienen se les llama compactos. Este término fue introducido por Fréchet en 1906 aunque el teorema de Heine-Borel que caracteriza a los subconjuntos compactos en $\mathbb{R}$ fue probado alrededor de una decada antes.

El teorema de Arzela-Ascoli es un resultado fundamental del análisis matemático el cual da condiciones necesarias y suficientes para decidir si un subconjunto de funciones continuas definidas en un intervalo cerrado y acotado es compacto, luego este teorema nos proporciona las condiciones para conocer si toda sucesión de una familia dada de funciones continuas definidas en un intervalo cerrado y acotado tiene una sub-sucesión convergente uniformemente. En estas notas presentamos la demostración de este importante teorema para lo cual revisaremos algunos conceptos necesarios para la prueba. Además, mencionares aplicaciones del teorema en ecuaciones diferenciales y cálculo de variaciones.

1. El espacio euclidiano

Recordemos que en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ la función valor absoluto $|\cdot| : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ tiene las siguientes propiedades

1. $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
2. $|\lambda x| = |\lambda||x|$, $\forall\ \lambda, x \in \mathbb{R}$.
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

A partir de esta función es posible definir propiedades que puede tener un subconjunto A de $\mathbb{R}$, recordaremos aquellas que se necesitarán para el desarrollo de este trabajo.

- A es *acotado* si existe $M > 0$ tal que $|a| \leq M$, $\forall\ a \in A$.
- A es *abierto* si para cada $a \in A$ existe $r > 0$ tal que el conjunto $B_r(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\}$ es subconjunto de A.
- A es *cerrado* si $\mathbb{R} \setminus A$ es un conjunto abierto.

- A es *compacto* si para cada colección $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de conjuntos abiertos tales que $A \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} V_\alpha$, existe una subcolección finita $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$.

Ejemplo 1.1

1. $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son conjutnos abiertos y cerrados.
2. Dado $a \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ el conjunto $B_r(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\}$ es un conjunto abierto y es llamado *bola abierta con centro a y radio r*.
3. El conjunto $\mathbb{Q}$ no es abierto ni cerrado.

A continuación revisaremos algunos conceptos y resultados respecto a sucesiones de números reales que son de gran utilidad al estudiar la compacidad de un conjunto.

Una sucesión $\{x_n\}_n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ es

- *de Cauchy* si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon$, para todo $n, m \geq N$.
- *convergene a* $x \in \mathbb{R}$ si para cada ε existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \epsilon$, para todo $n \geq N$. En este caso escribimos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ o bien $x_n \to x$.
- *es acotada* si existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.2 Una sucesión de números reales converge si, y sólo si, es de Cauchy.

Proposición 1.3 Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ y $x \in X$. Si $\{x_n\}$ converge a x, entonces cualquier subsucesión de $\{x_n\}$ converge a x.

Teorema 1.4 (de Bolazo-Weierstrass) Si $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R}$ es una sucesión acotada, entonces $\{x_n\}_n$ posee una subsucesión convergente.

Proposición 1.5 Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado si y sólo si $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$ para cada sucesión convergente $\{x_n\}_n \subset A$.

Hemos visto que la definición de conjunto compacto está dada a partir de conjuntos abiertos en el siguiente teorema se presenta una muy útil caracterización de los conjuntos compactos de números reales.

Teorema 1.6 (de Heine-Borel) Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es compacto si y sólo si A es cerrado y acotado.

2. Espacios normados

En esta sección generalizaremos los conceptos vistos en la sección anterior y veremos un ejemplo en el que el teorema de Heine-Borel en este nuevo contexto deja de ser válido. Como vimos el papel que juega el valor absoluto es fundamental así que iniciamos generalizando este concepto en espacios vectoriales.

Definición 2.1 Sea X un espacio vectorial. Una función $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ es una *norma* si tiene las siguientes propiedades:

1. $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

2. $|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}\ x \in X$.

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall\ x, y \in X$.

A par $(X, \|\cdot\|)$ se le conoce con el nombre de espacio normado.

Puesto que un espacio normado es una generalización de los números reales, un ejemplo natural de este tipo de espacios es $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, luego cada propiedad que se cumple en espacios normados se cumple en particular $\mathbb{R}$. Más adelante veremos otros ejemplos de espacios normados.

Las definiciones de conjunto acotado, abierto, cerrado y compacto son análogas a las que hemos dado en la sección anterior asimismo las definiciones de sucesión de Cauchy, convergente y acotada. Sin embargo aun cuando toda sucesión convergente es de Cauchy la otra implicacón de la proposión 1.2 ya no se cumple en general, cuando esto sucede al espacio normado se le llama *espacio completo* o *espacio de Banach*, así $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un espacio de Banach.

Las proposiciones 1.3 y 1.5 siguen siendo válidas en espacios normados, no sucede lo mismo con el teorema de Bolzano-Weiestrass y el teorema de Heine-Borel. Con lo que se pierde la tan útil caracterización de los conjuntos compactos pero los siguientes resultados muestran que algunas propiedades de los compactos se conservan.

Teorema 2.2 Sea X un espacio normado y $K \subseteq X$. Entonces K es compacto si y solo si cada sucesión $\{x_n\} \subset K$ posee una subsucesión convergente a un punto en K.

Proposición 2.3 Sea X un espacio normado. Si $K \subset X$ es compacto, entonces K es cerrado.

Proposición 2.4 Sea $\{x_n\} \subset X$ una sucesión. Si $\{x_n\}$ converge a $x \in X$, entonces el conjunto $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es cerrado.

Para terminar esta sección presentamos un ejemplo de un conjunto cerrado y acotado en un espacio de Banach que no es compacto.

Ejemplo 2.5 Consideremos la colección ℓ^1 de sucesiones reales convergentes absolutamente convergentes. Entonces ℓ^1 es un espacio vectorial y la función $\|\cdot\|_1 : \ell^1 \to [0, \infty)$ definida por

$$\|\{x_n\}\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

es una norma. Resulta que el espacio $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach. El conjunto $B = \{s \in \ell^1 \mid \|s\|_1 \leq 1\}$ es un conjunto cerrado y claramente acotado. Denotemos por e_n la sucesión cuyo n-ésimo término es 1 y los demás son 0. Notemos que $e_n \in B$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, además si $n \neq m$

$$\|e_n - e_m\|_1 = 2. \tag{2.1}$$

Ahora observemos que la colección de conjuntos abiertos $\{B_1(x) \mid x \in B\}$ cumple que $B \subset \bigcup_{x \in B} B_1(x)$. Veamos que no existe una subcolección finita cuya unión contenga a B. Fijemos $x \in B$ y tomemos $y, z \in B_1(x)$. Entonces

$$\|z - y\|_1 \leq \|z - x\|_1 + \|x - y\|_1 < 2.$$

De (2.1) se sigue que en cada $B_1(x)$ hay a lo más una sucesión e_n. Puesto que la colección $\{e_n\}_n$ es infinita concluimos que ninguna subcolección finita de $\{B_1(x) \mid x \in B\}$ contiene a B. Por lo tanto B no es compacto.

3. El espacio de las funciones continuas

Consideremos un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, por el teorema de Heine-Borel tal conjunto es compacto. Definamos
$$\mathcal{C}([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{es continua}\}.$$

Puesto que $[a,b]$ es compacto resulta que cada función en $\mathcal{C}([a,b])$ es una función uniformemente continua. Recordemos dos tipos de convergencia de sucesiones en este conjunto.

Definición 3.1 Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{C}([a,b])$ una sucesión y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. La sucesión $\{f_n\}$

a) *converge puntualmente* a f si $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in [a,b]$, escribimos $f_n \to f$ (puntualmente).

b) *converge uniformemente* a f si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $n \geq N$ y para todo $x \in [a,b]$.

c) *es uniformemente de Cauchy* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in N$ tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, para todo $n, m \geq N$ y para todo $x \in [a,b]$.

Como consecuencia directa de la definición anterior se sigue que *cualquier sucesión de funciones es uniformemente de Cauchy converge uniformemente* y cada sucesión de funciones que converge uniformemente converge puntualmente. Además de la unicidad del límite en $\mathbb{R}$ se obtiene que si una sucesión converge puntual y uniformemente los límites son la misma función.

Ejemplo 3.2 Consideremos la sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida para cada $n \in \mathbb{N}$ como

$$f_n(x) = \begin{cases} -nx + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Es una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente pero no uniformemente.

Ejemplo 3.3 Sean $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = \dfrac{senx}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $f_n \to 0$ uniformemente.

Un resultado importante es que **si una sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{C}([a,b])$ converge uniformemente a f entonces la función f también es continua**.

Al considerar la suma de funciones y el producto de un numero real con una función definidas puntualmente se obtiene que el conjunto $\mathcal{C}([a,b])$ es un espacio vectorial en el cual la función $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}([a,b]) \to [0,\infty)$ definida para cada $f \in \mathcal{C}([a,b])$ por

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$$

es una norma.

Teorema 3.4 El espacio $\mathcal{C}([a,b])$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Puesto que $\mathcal{C}([a,b])$ es un espacio normado se puede hablar de convergencia de sucesiones con la norma, en el siguiente teorema se presenta una equivalencia de esta convergencia con la convergencia uniforme vista anteriormente.

Teorema 3.5 Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{C}([a,b])$ sucesión. Entonces $\{f_n\}$ converge en la norma $\|\cdot\|_\infty$ si y sólo si $\{f_n\}$ converge uniformemente.

4. El teorema de Arzela-Ascoli

Como hemos visto la compacidad en espacios normados en general no necesariamente se comporta como en el espacio euclidiano, el teorema de Arzela-Ascoli no proporciona una caracterización de los conjuntos compactos en el espacio de funciones continuas en un compacto. Para establecer este teorema es necesario introducir la siguiente demostración.

Definición 4.1 Un conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}([a,b])$ es *equicontinuo* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f_n(x) - f_n(y)\|_\infty < \varepsilon, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ y } x, y \in [a,b] \text{ con } |x-y| < \delta.$$

Teorema 4.2 Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}([a,b])$ un conjunto. Entonces $\mathcal{F}$ es compacto si, y sólo si, $\mathcal{F}$ es cerrado, equicontinuo y acotado.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es compacto. Puesto que los conjuntos compactos son cerrados resta probar que $\mathcal{F}$ es equicontinuo y acotado. Primero demostraremos que $\mathcal{F}$ es equicontinuo. Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que la colección $\{B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$ es una cubierta abierta de $\mathcal{F}$, podemos elegir $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ tales que

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f). \tag{4.1}$$

Ahora como cada $i = 1, \ldots, n$ la función f_i es uniformemente continua existen $\delta_i > 0$ tales que si $x, y \in [a,b]$ y $|x-y| < \delta_i$, entonces $|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Consideremos $\delta = \min \delta_1, \ldots, \delta_n$, entonces para cada parr $x, y \in [a,b]$ con $|x-y| < \delta$ se cumple que

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \ \forall\, i = 1, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Finalmente tomemos $f \in \mathcal{F}$, por (4.1) existe i tal que $\|f - f_i\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Luego

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall\, x \in [a,b]. \tag{4.3}$$

Por la desigualdad del triangulo, (4.2) y (4.3)

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| < \varepsilon, \ \forall\, |x-y| < \delta.$$

Por lo tanto $\mathcal{F}$ es equicontinuo. Para probar que $\mathcal{F}$ es acotado elijamos $f_1, \ldots, f_N \in \mathcal{F}$ tales que $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B_1(f_j)$ y definamos $M = 1 + \max\{\|f_j\|_\infty \mid j = 1, \ldots, N\}$. De esta manera si $f \in \mathcal{F}$ existe j tal que $f \in B_1(f_j)$. Luego

$$\|f\|_\infty \leq \|f - f_j\|_\infty + \|f_j\|_\infty \leq M.$$

Ahora supongamos que $\mathcal{F}$ es equicontinuo y acotado. Para mostrar que $\mathcal{F}$ es compacto haremos uso del teorema 4.2. Así tomemos una sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$. Construiremos una subsucesión que converge puntualmente y posterioremente probaremos que la convergencia es uniforme.

Puesto que $\mathcal{F}$ es un conjunto acotodo, se sigue que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada. Luego $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión acotada $\forall\, x \in [a, b]$.

Enumeremos el conjunto de los números racionales en el intervalo $[a, b]$, de este modo $\mathbb{Q} \cap [a, b] = \{r_1, r_2, ...\}$.

Ya que $\{f_n(r_1)\}$ es una sucesión acotada, por el teorema de Bolazao-Weierstrass, existe una subsucesión convergente, es decir existe una subsucesión $\{f_{1,n}\}_n$ de $\{f_n\}_n$ tal que $\{f_{1,n}(r_1)\}$ converge. Del mismo modo existe una subsucesión $\{f_{2,n}\}$ de $\{f_{1,n}\}$ tal que $f_{2,n}(r_2)$ es convergente. Notemos que como $f_{2,n}$ es una subsucesión de $f_{1,n}$, entonces $f_{2,n}(r_1)$ también es convervente. Procediendo de esta manera para cada $k \in \mathbb{N}$ encontramos una sucesión $\{f_{k,n}\}_n$ tal que es subsucesión de $\{f_{k-1,n}\}_n$ y $\{f_{k,n}(r_i)\}_n$ converge para cada $i = 1, \ldots, k$. Así obtenemos $\{f_{n,n}\}_n$ es una subsucesión de $\{f_n\}_n$ tal que $\{f_{n,n}(r)\}_n$ converge para cada $r \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$.

Hagamos $g_n = f_{n,n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Probaremos que $\{g_n\}$ es una sucesión convergente en $\mathcal{C}[a, b]$. Sea $\varepsilon > 0$. Ya que $\{g_n\} \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es equicontinuo, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [a, b]$ y $|x - y| < \delta$ entonces

$$|g_n(x) - g_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otra parte, como $[a, b]$ es compacto existen $y_1, y_2, \ldots, y_K \in [a, b]$ tal que $[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^{K} [y_j - \frac{\delta}{2}, y_j + \frac{\delta}{2}]$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ para cada $j = 1, \ldots, K$ podemos elegir $r_j \in \mathbb{Q}$ tal que $|r_j - y_j| < \frac{\delta}{2}$.

Puesto que para cada j la sucesión $\{g_n(r_j)\}_n$ es convegente, también es de Caucy así existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_j$ se tiene que

$$|g_n(r_j) - g_m(r_j)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.4}$$

Definimos $N = \max\{N_1, \ldots, N_K\}$. Entonces para $n, m \geq N$ se cumple (4.4), para todo $j = 1, \ldots, K$.

Ahora fijemos $x \in [a, b]$. Entonces existe $1 \leq \ell \leq K$ tal que $|x - y_\ell| < \frac{\delta}{2}$, luego $|x - r_\ell| \leq |x - y_\ell| + |y_\ell - r_\ell < \delta$. Por lo tanto si $n, m \geq N$, entonces

$$|g_n(x) - g_m(x) \leq |g_n(x) - g_n(r_\ell)| + |g_n(r_\ell) - g_m(r_\ell)| + |g_m(r_\ell) - g_m(x)| < \varepsilon.$$

De la arbitrariedad de x se ha probado que $\{g_n\}$ es uniformemente de Cauchy, por lo tanto $\{g_n\}$ converge uniformemente lo que es equivalente a que $\{g_n\}$ converge en $\mathcal{C}([a, b])$. Finalmente puesto que $\mathcal{F}$ es un conjunto cerrado y $\{g_n\} \subset \mathcal{F}$, se sigue que $\lim_{n\to\infty} g_n \in \mathcal{F}$. ■

Una consecuencia muy útil del teorema anterior es el siguiente corolario.

Corolario 4.3 Si $\{f_n\} \subset \mathcal{C}([a, b])$ es una sucesión equicontinua y acotada, entonces $\{f_n\}$ contiene una subsucesión que converge uniformemente.

5. Aplicaciones

5.1. Cálculo de Variaciones

Para $a < b$, definimos el conjunto

$$C_0^\infty(a,b) \doteq \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ \varphi^{(n)}(x) \text{ existe } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in (a,b) \\ \text{y } \operatorname{supp}(\varphi) \subset (a,b) \ \}$$

Aquí $\varphi^{(n)}$ denota la $n-$ésima derivada de φ. El espacio $C_0^\infty(a,b)$ es no-vació dado que contiene a la función $\eta_{a,b}$.

Lema 5.1 (Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones) Si $f \in C([a,b])$ y

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{for all } \varphi \in C_0^\infty(a,b),$$

entonces $f(x) = 0$ para toda $x \in [a,b]$.

Consideremos el siguiente problema

$$\begin{aligned} -u'' + u = f \quad \text{en } [a,b] \\ u(a) = A, \quad u(b) = B, \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua. Convertiremos la ecuación (5.1) en un problema de minimización. Para esto definamos el siguiente funcional

$$J(u) = \int_a^b \left(\frac{1}{2}(u'^2 + u^2) - fu \right) dx, \tag{5.2}$$

donde $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ pertenece al conjunto

$$\mathcal{K} = \{v \in C^2([a,b]) : v(a) = A \quad \& \quad v(b) = B\},$$

con

$$C^2([a,b]) = \{v : [a,b] \to \mathbb{R} : v, v' \text{ and } v'' \text{ son } \textbf{continuas} \text{ en } [a,b] \ \}.$$

Lema 5.2 (Desigualdad de Young) Sean $a > 0$ y $b > 0$. Entonces tenemos que

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Demostración. Observemos que

$$0 \leq (a-b)^2 \quad = \quad a^2 - 2ab + b^2.$$

De aquí el resultado es inmediato. ■

Ahora, por la desigualdad de Young,

$$\left| \int_a^b f u \, dx \right| \leq \int_a^b \left(\frac{f^2}{2} + \frac{u^2}{2} \right) dx.$$

Por lo que, si $u \in \mathcal{K}$,

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_a^b \left(\frac{1}{2}(u'^2 + u^2) - fu \right) dx \\ &\geq \int_a^b \left(\frac{1}{2}u'^2 - \frac{f^2}{2} \right) dx \geq -\frac{1}{2} \int_a^b f^2 \, dx. \end{aligned}$$

En conclusión, si definimos $M = \frac{1}{2} \int_a^b f^2 \, dx$, tenemos que

$$J(u) \geq -M \quad \text{para toda } u \in \mathcal{K}. \tag{5.3}$$

Esto nos dice que nuestro funcional J está acotado por abajo, y por lo tanto, tiene sentido intentar encontrar su mínimo en $\mathcal{K}$.

Teorema 5.3 Una función $u \in \mathcal{K}$ resuelve (5.1) si y solo si minimiza (5.2).

Demostración. Supongamos que u es una solución de (5.1). Debemos demostrar que

$$J(u) \leq J(v) \quad \text{para toda } v \in \mathcal{K}.$$

Sea $v \in \mathcal{K}$, entonces

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \int_a^b \left(\frac{1}{2}[v'^2 - u'^2 + v^2 - u^2] - f[v-u] \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left((v' - u' + u')^2 - u'^2 + (v - u + u)^2 - u^2 \right) dx \\ &\quad - \int_a^b f[v-u] dx \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \frac{1}{2} \int_a^b \left((v' - u')^2 + (v-u)^2 \right) dx \\ &\quad - \int_a^b \left(u'(v' - u') + u(v-u) \right) dx \\ &\quad - \int_a^b f[v-u] dx \end{aligned}$$

Dado que $(v-u)(a) = (v-u)(b) = 0$, integración por partes nos da que

$$\int_a^b u'(v' - u') dx = -\int_a^b u''(v-u) dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \frac{1}{2}\int_a^b \left((v'-u')^2 + (v-u)^2\right) dx \\ &\quad + \int_a^b \left(u'' - u - f\right)(v-u)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b \left((v'-u')^2 + (v-u)^2\right) dx, \end{aligned}$$

dado que u satisface (5.1). Por lo tanto, $J(v) \geq J(u)$. Supongamos que $u \in \mathcal{K}$ minimiza J. Queremos demostrar que u resuelve (5.1). Sea $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$. Definamos

$$F(t) \doteq J(u+t\varphi) = \int_a^b \left(\frac{1}{2}(u'+t\varphi')^2 + \frac{1}{2}(u+t\varphi)^2 - f(u+t\varphi)\right) dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Al término $t\varphi$ se le conoce como **variación** de la función u.
La función F tiene un mínimo en $t=0$ dado que $u+t\varphi \in \mathcal{K}$. Más aún, la función F es diferenciable. No es díficil ver que

$$\dot{F}(t) = \int_a^b \left(u'\varphi' + 2t\varphi'^2 + u\varphi + 2t\varphi^2 - f\varphi\right) dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\dot{F}(0)$ representa la **derivada direccional** de J en u en la dirección φ.

Por lo tanto, cuando $t=0$, tenemos que

$$0 = \dot{F}(0) = \int_a^b \left(u'\varphi' + u\varphi - f\varphi\right) dx$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} \int_a^b u'\varphi' &= u'\varphi\big|_a^b - \int_a^b u''\varphi dx \\ &= -\int_a^b u''\varphi dx, \quad \text{dado que } \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b \left(-u'' + u - f\right)\varphi dx = 0.$$

Dado que $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ es arbitrario, tenemos por el Lema (5.1) que

$$-u'' + u - f \equiv 0 \quad \text{en } (a,b).$$

Por lo tanto, u resuelve (5.1) y esto termina con la demostración. ■

En la literatura a la derivada

$$\dot{F}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{J(u+t\varphi) - J(u)}{t}$$

se le conoce como la **derivada de Gateaux** en la dirección φ en el punto u. M. Frechet y M. R. Gateaux, a petición de su mentor J. Hadamard, desarrollaron una teoría de diferenciación en espacios de dimensión infinita.

Consideremos el conjunto no vacío

$$I = \{J(u) : u \in \mathcal{K}\} \subset \mathbb{R}.$$

Recordemos que I está acotado por abajo por $-M$, ver (5.3). Por lo tanto,

$$\kappa \doteq \inf I \quad \text{exists.}$$

Ahora, tenemos que existe una sucesión (u_n) en $\mathcal{K}$ tal que

$$J(u_n) \to \kappa \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Vamos a demostrar que (u_n) tiene una sub-sucesión (u_{n_k}) que converge uniformemente a una función u. Este elemento u sería un candidato a mínimo.

Teorema 5.4 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Supongamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son dos funciones integrables. Entonces,

$$\Big| \int_a^b fg \Big| \leq \left(\int_a^b f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.4}$$

Demostración.

No es díficil ver que f^2, g^2 y fg son integrables en $[a,b]$. Denotemos por

$$\lambda \doteq \left(\int_a^b f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad \mu \doteq \left(\int_a^b g^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz será inmediata si demostramos que

$$\int_a^b |fg| \leq \lambda\mu, \tag{5.5}$$

dado que $\Big| \int_a^b fg \Big| \leq \int_a^b |fg|$.

Supongamos que λ y μ son distintas de cero. Usando el lema (5.2),

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{|f|}{\lambda} \cdot \frac{|g|}{\mu} &\leq \int_a^b \frac{\frac{f^2}{\lambda^2} + \frac{g^2}{\mu^2}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_a^b \frac{f^2}{\lambda^2} + \int_a^b \frac{g^2}{\mu^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2} + \frac{\mu^2}{\mu^2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Por lo que (5.5) queda demostrada. ■

Regresemos a nuestra discusión previa. Dado que cada u_n pertenece a $\mathcal{K}$, tenemos que para toda $x, y \in [a,b]$, $y < x$, que

$$\begin{aligned}
|u_n(x) - u_n(y)| &= \left| \int_y^x u_n' \right| \\
&\leq \int_y^x |u_n'| \\
\text{(por la desigualdad de C-S)} &\leq \left(\int_y^x 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_y^x |u_n'|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Tenemos nuevamente por la desigualdad de Young que

$$\int_a^b \left(f u_n - \frac{1}{2} u_n^2 \right) dx \leq \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx = M.$$

Entonces, para $x, y \in [a,b]$, $y < x$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|u_n(x) - u_n(y)| &= |x-y|^{\frac{1}{2}} \left(\int_y^x |u_n'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |x-y|^{\frac{1}{2}} \left(J(u_n) + \int_a^b \left(f u_n - \frac{1}{2} u_n^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |x-y|^{\frac{1}{2}} \left(J(u_n) + M \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Dado que $J(u_n) \to \kappa$, existe $K > 0$ tal que

$$|J(u_n)| \leq K.$$

En conclusión, para $x, y \in [a,b]$ y para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq \overline{M} |x-y|^{\frac{1}{2}}, \quad \text{donde } \overline{M} \doteq (K+M)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.6}$$

De aquí se puede concluir que la sucesión u_n es equicontinua. Ahora, de (5.6) obtenemos que

$$\begin{aligned}
|u_n(x)| &\leq |u_n(x) - u_n(a)| + |u_n(a)| \\
&\leq \overline{M} |x-a|^{\frac{1}{2}} + A \\
&\leq \overline{M} |b-a|^{\frac{1}{2}} + A \quad \text{para toda } x \in [a,b].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión (u_n) también es acotada. Por el teorema de Arzelá-Ascoli tenemos que (u_n) tiene una sub-sucesión (u_{n_k}) que converge uniformente a una función $u \in C([a,b])$. De la función u lo único que sabemos es que es continua en $[a,b]$ y que $u(a) = A$ y $u(b) = B$. El siguiente paso, ¡y uno de los más díficiles!, es demostrar que $u \in C^2([a,b])$.

5.2. No-Lineales y Operadores Compactos

Sea $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que

$$|V(x)| \leq M|x| \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}.$$

Consideremos el problema no-lineal de valores en la frontera:

$$\begin{aligned} -u''(x) &= V(u(t)) \\ u(0) &= 0 = u(1). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Para resolver la ecuación (5.7) consideremos primero el problema:

$$\begin{aligned} -u_f''(x) &= V(f(x)) \\ u_f(0) &= 0 = u_f(1), \end{aligned} \tag{5.8}$$

donde $f \in C([0,1])$.

Integrando dos veces f vemos que la solución de (5.8) está dada por

$$u_f(x) = \int_0^x \int_0^\xi V(f(y))dyd\xi - x\int_0^1 \int_0^\xi V(f(y))dyd\xi. \tag{5.9}$$

Lo que hemos obtenido entonces es un mapeo

$$L : C([0,1]) \to C([0,1])$$

dado por $L(f) = u_f$, donde $f \in C([0,1])$ y u_f es la solución en (5.9) . Ahora, notemos que para cada $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |u_f(x)| &\leq \int_0^x \int_0^\xi |V(f(y))|dyd\xi + |x|\int_0^1 \int_0^\xi |V(f(y))|dyd\xi \\ &\leq M\int_0^1 \int_0^\xi |f(y)|dyd\xi \leq M\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

En general, podemos demostrar que existe una constante $C > 0$ tal que para toda $f \in C([0,1])$,

$$\|u_f\|_\infty + \|u_f'\|_\infty + \|u_f''\|_\infty \leq C\|f\|_\infty \tag{5.10}$$

Lo importante a notar aquí es que una solución al problema (5.7) sería una $u \in C([0,1])$ tal que $L(u) = u$. Por lo que, resolver (5.7) se convierte en un problema de punto fijo.

Varios teoremas sobre la existencia de puntos fijos requieren que el mapeo L sea compacto. Esto quiere decir que si (u_n) es una sucesión acotada en $C([0,1])$ entonces $(L(u_n))$ contiene una subsucesión convergente. Supongamos que $\|u_n\|_\infty \leq K$. De (5.10) obtenemos inmediatamente que

$$\|L(u_n)\|_\infty \leq CK \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Sean $x, y \in [0,1]$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $x < y$. Por el teorema del valor medio, existe $\xi \in (x,y)$ tal que

$$L(u_n)(y) - L(u_n)(x) = L(u_n)'(\xi)(y - x).$$

Invocando nuevamente (5.10) se tiene que

$$|L(u_n)(y) - L(u_n)(x)| \leq |L(u_n)'(\xi)||y - x| \leq CK|y - x|.$$

Por lo que dado $\varepsilon > 0$, $\delta \doteq \frac{\varepsilon}{CK}$ cumple que si $|x - y| < \delta$, entonces

$$|L(u_n)(y) - L(u_n)(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Referencias

[1] F. Galaz-Fontes, *Elementos de Análisis Funcional.* México, D.F., S y G Editores,, 2006.

[2] H. Kielhöfer, *Calculus of Variations.* Switzerland, Springer, 2018.

[3] J. E. Marsden and M. J. Hoffman, *Elementary Classical Analysis.* San Francisco, W. H. Freeman and Company, 1974.

[4] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis.* Mineola, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976.