Relación entre la topología y el álgebra conmutativa

Miriam Bocardo Fajardo
Juan Manuel Márquez Bobadilla
Osbaldo Mata Gutiérrez
Rubén Sanchez Gómez
María de la Paz Suárez Fernández

Índice general

El objetivo de estas notas es motivar a los estudiantes a estudiar ciertos invariantes topológicos, tales como el indice, poniendo las bases del álgebra lineal estudiandolos tambén desde el punto de vista álgebraico y apoyandose con software científico.

0.1. Campos vectoriales e índice

Como punto de partida, en esta sección se revisan algunos coceptos básicos para definir el índice de una curva, pasando por el concepto de campo vectorial, puntos singulares, estructura local de puntos singulares y finalmente el índice de un campo y de una curva.

Definición 1 *Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, un* **campo vectorial** X *es una aplicación $X : U \to \mathbb{R}^2$ tal que, a cada punto $\mathbf{x} \in U$ se le asocia un vector $X(\mathbf{x})$. Una curva integral del campo X es una solución de la ecuación diferencial*

$$\mathbf{x}' = X(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x} \in U). \tag{1}$$

De modo que si, $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to U$ es una solución de la ecuación diferencial (1) entonces $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$, $(t \in I)$.

De forma esquemática,

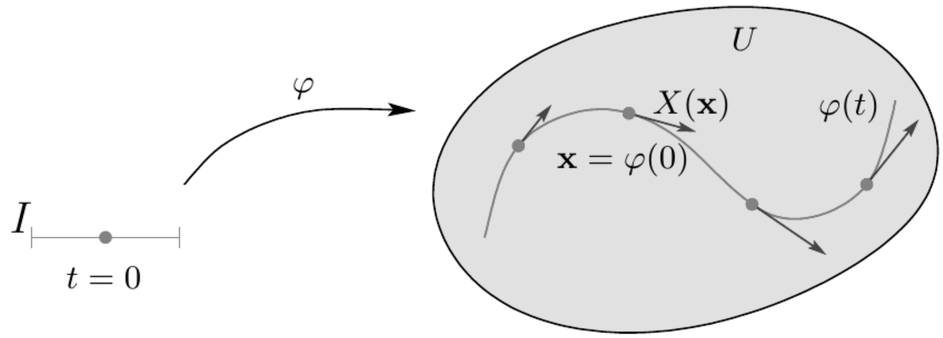


Figura 1: Curva integral sobre un campo vectorial.

Definición 2 *Un* **punto singular**, $\mathbf{x} \in X$ *es un punto tal que* $X(\mathbf{x}) = 0$. *Un punto* $\mathbf{x}$ *es una* **es una singularidad aislada**, *si es el único punto singular en una vecidad.*

Ahora, veremos la estructura local de los puntos singulares. Si $X := (P, Q)$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$, entonces la parte lineal esta dada por

$$DX(\mathbf{x}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0) \\ \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0) \end{pmatrix}.$$

El punto singular x_0 se clasifica como

a) **No degenerado**, si 0 es un valor propio de $DX(x_0)$

b) **Hiperbólico**, Si λ_1, λ_2 son valores propios de $DX(x_0)$, con $real(\lambda_1)$, y $real(\lambda_2)$ diferentes de 0.

c) **Nilpotente**, Si λ_1, λ_2 son valores propios de $DX(x_0)$, con $\lambda_1 = \lambda_2$, y $DX(x_0) \neq 0$.

d) **Linealmente cero**, si $DX(x_0) \equiv 0$.

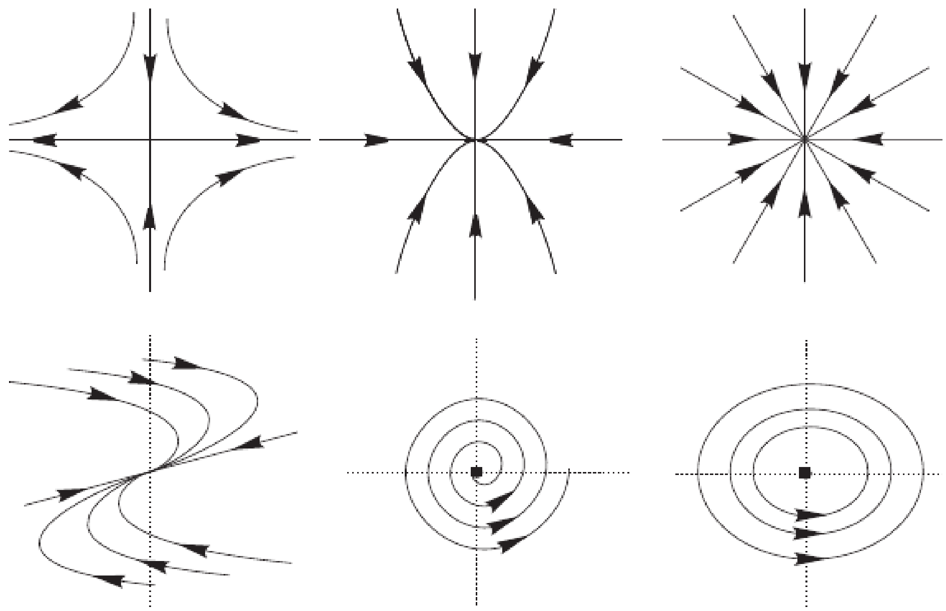


Figura 2: Puntos singulares sobre campos vectoriales.

e) **Linealmente centro**, Si los valores propios de $DX(x_0)$ son imaginarios puros y distintos de cero.

De forma esquemática, una representación gráfica tendría la forma,

Definición 3 (Índice de una curva.) *Sea* $\sigma : I \to \mathbb{R}^2$ *una curva, donde* $I = [0, 1]$, *tal que* $\sigma(0) = \sigma(1)$.

Consideremos ahora la función argumento $arg : I \to \mathbb{R}$, *donde el argumento es medido a partir del eje* x *a lo largo de* $\sigma(I)$. *Entonces el* **Índice** *de* σ *alrededor de* 0 *es*

$$Ind(0, \sigma) := \frac{arg(1) - arg(0)}{2\pi}.$$

De aquí, un resultado inmediato sería:

Proposición 4 *El* $Ind(0, \sigma) = n$, *con* $n \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración: Sea $\sigma : I \to \mathbb{S}^1$, definido por $\sigma(t) := e^{(2\pi n)t}$, donde $arg(t) = 2\pi nt$. Entonces el Índice es

$$Ind(0, \sigma) := \frac{arg(1) - arg(0)}{2\pi} = \frac{2\pi n}{2\pi} = n.$$

es decir, $Ind(0, \sigma) = n$. ■

Definición 5 *Un* **valor regular**, $c \in \mathbb{R}^2$ *es un punto tal que* $X(p) = c$, *con* $c \neq 0$ *y* $DX_p \neq 0$.

Definición 6 (Índice de campos vectoriales) *Sea* X *un campo vectorial,* $0 \in U$ *una singularidad aislada de* X. *Consideremos una curva* $\sigma : I \to U \setminus 0$, *tal que* $\sigma(0) = \sigma(1)$, *entonces el* **Índice del campo** *se define por el número de vueltas que el campo* X *da con la curva* σ *alrededor de la singularidad aislada* 0. *y se denota por* $Ind(X, 0)$.

Ejemplo 7 *Si* $X = (x, y)$ *Aquí estamos pensado que el campo va del eje* x *a* y *si nos movemos con una curva alrededor del cero dariamos una vuelta en sentido positivo por lo tanto el* $Ind(X, 0) = 1$. *Si* $X = (x, -y)$ *Aquí estamos pensado que el campo va del eje* x *a* $-y$ *si nos movemos con una curva alrededor del cero dariamos una vuelta en sentido negativo del por lo tanto el* $Ind(X, 0) = -1$. *Si* $X = (-y, x)$ *Aquí estamos pensado que el campo va del eje* $-y$ *a* x *si nos movemos con una curva alrededor del cero dariamos una vuelta en sentido positivo por lo tanto el* $Ind(X, 0) = 1$.

Teorema del Índice de gérmenes de funciones

Desde la variable compleja

El concepto de Índice de una función $\gamma : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{C}$ que uno estudia en un curso elemental de variable compleja se define como

$$I_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dw}{w - z}.$$

Esto determina un número entero asociado a la elección de un punto $z \in \mathrm{dom} f \setminus \gamma$ y debe ser un contorno γ del plano complejo.

Para una función $f : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ se tiene

$$I_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)dw}{w - z}.$$

Este concepto es uno de las varias formas del concepto de **grado** de una función, cuyas generalizaciones van hasta el concepto de Índice de una función que sirve para estudiar la topología de ella misma.

Variedades complejas

Una variedad compleja es un espacio topológico $\mathcal{M}$ de dimensión compleja m que es localmente homeomorfo a $\mathbb{C}^m$ y esto significa que para cada punto $p \in \mathcal{M}$ existe un entorno (vecindad abierta) U_p de p y una función continua $\Phi : U_p \to \mathcal{M}$ tal que para otra $\Psi : V_p \to \mathcal{M}$ de estas funciones se satisfaga, para $\mathcal{W} = \Phi U_p \cap \Psi V_p$, que la transformación

$$\Psi^{-1} \circ \Phi : \Phi^{-1}\mathcal{W} \to \Psi^{-1}\mathcal{W},$$

es una función holomorfa $\mathbb{C}^m \dashrightarrow \mathbb{C}^m$.

El espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ es el espacio vectorial generado por las derivaciones

$$\frac{\partial}{\partial z^j}$$

que están definidas para escalares $\rho : U_p \to \mathbb{C}$ mediante

$$\frac{\partial \rho \circ \Phi}{\partial z^j},$$

donde $j = 1, ..., m$.

Dos funciones $f, g : \mathbb{C}^n \dashrightarrow \mathbb{C}$ se dice que son equivalente si para un punto en el dominio de ambas hay respectivos entornos U en el dominio de f y V en el dominio de g donde existe un entorno $W \subseteq U \cap V$ de p tal que

$$f|_W = g|_W.$$

Esto determina una relación de equivalencia entre estas funciones. La clase de equivalencia de f recibe el nombre de germen de la función f.

El grado de una función holomorfa.

Un valor regular de una función $f : X \to Y$ es un elemento $q \in Y$ para el cual $f^{-1}(q) \neq \varnothing$ y para cada $x \in f^{-1}(q)$ la derivada $f'(x)$ tiene rango máximo.

El signo de un punto p en el dominio de una función $f : X \to Y$ entre variedades complejas se define como el $+1$ si la derivada $f'(p)$ conserva la orientación y como -1 si la invierte.

Para una función $f : X \to Y$ entre variedades de la misma dimensión el grado de f en un valor regular q se define como la suma

$$\deg(f,q) = \sum_{p\,\text{ínf}^{-1}} \text{sign} f'(p).$$

El siguiente cambio de base entre derivaciones

$$P : \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

tiene las siguientes matrices asociadas

$$[P] = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -i/2 & i/2 \end{pmatrix} \quad , \quad [P]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Para una función de variable compleja

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

la existencia de su derivada conduce a las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & -\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix},$$

entonces entre las bases en variables x, y y $z, \bar{z}$ se tiene

$$[P]^{-1} f' [P] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial z} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix}.$$

Ahora para un campo $f : \mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}^2$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ \\ z^2 \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} f^1(z^1, z^2) \\ \\ f^2(z^1, z^2) \end{pmatrix}$$

es interpretado desde el punto de vista de $f : \mathbb{R}^4 \dashrightarrow \mathbb{R}^4$ como

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} u^1 \\ v^1 \\ u^2 \\ v^2 \end{pmatrix}.$$

Entonces su derivada es

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^1}{\partial y^1} & \frac{\partial u^1}{\partial x^2} & \frac{\partial u^1}{\partial y^2} \\ \\ \frac{\partial v^1}{\partial x^1} & \frac{\partial v^1}{\partial y^1} & \frac{\partial v^1}{\partial x^2} & \frac{\partial v^1}{\partial y^2} \\ \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial y^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} & \frac{\partial u^2}{\partial y^2} \\ \\ \frac{\partial v^2}{\partial x^1} & \frac{\partial v^2}{\partial y^1} & \frac{\partial v^2}{\partial x^2} & \frac{\partial v^2}{\partial y^2} \end{pmatrix},$$

pero teniendo en cuenta el cambio de base entre derivaciones

$$\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - i\frac{\partial}{\partial y^k}\right)$$

$P :$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z^k}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i\frac{\partial}{\partial y^k}\right),$$

que es

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y^2}\right\} \dashrightarrow \left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \frac{\partial}{\partial \overline{z^1}}, \frac{\partial}{\partial z^2}, \frac{\partial}{\partial \overline{z^2}}\right\},$$

permite establecer la conversión de la derivada de f en

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial z^1} & 0 & \frac{\partial f^1}{\partial z^2} & 0 \\ \\ 0 & \overline{\frac{\partial f^1}{\partial z^1}} & 0 & \overline{\frac{\partial f^1}{\partial z^2}} \\ \\ \frac{\partial f^2}{\partial z^1} & 0 & \frac{\partial f^2}{\partial z^2} & 0 \\ \\ 0 & \overline{\frac{\partial f^2}{\partial z^1}} & 0 & \overline{\frac{\partial f^2}{\partial z^2}} \end{pmatrix}.$$

Pero considerando el cambio

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z^1},\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1},\frac{\partial}{\partial z^2},\frac{\partial}{\partial \bar{z}^2}\right\} \dashrightarrow \left\{\frac{\partial}{\partial z^1},\frac{\partial}{\partial z^2},\frac{\partial}{\partial \overline{z^1}},\frac{\partial}{\partial \overline{z^2}}\right\},$$

nos proporcionará

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial z^1} & \frac{\partial f^1}{\partial z^2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f^2}{\partial z^1} & \frac{\partial f^2}{\partial z^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\frac{\partial f^1}{\partial z^1}} & \overline{\frac{\partial f^1}{\partial z^2}} \\ 0 & 0 & \overline{\frac{\partial f^2}{\partial z^1}} & \overline{\frac{\partial f^2}{\partial z^2}} \end{pmatrix},$$

Esto es una matriz por bloques de la forma $\begin{pmatrix} \frac{\partial(f^1,f^2)}{\partial(z^1,z^2)} & O \\ O & \overline{\frac{\partial(f^1,f^2)}{\partial(z^1,z^2)}} \end{pmatrix}$ y desde aquí $\det[f'] = \left|\det \frac{\partial(f^1,f^2)}{\partial(z^1,z^2)}\right|^2 \geq 0$.

Todo esto implica que para una función holomorfa de varias variables siempre tendrá deg positivo en todos sus valores regulares.

Índice de Poincaré - Hopf

Para una $f : \mathbb{C}^n \dashrightarrow \mathbb{C}^n$ holomorfa el Índice $I_p(f)$, se define como el grado de la función

$$\frac{f}{\|f\|} : S^{2n-1}_{\varepsilon,p} \to S^{2n-1}_{1,0}$$

Número de Milnor

Sea $\mathcal{O}_p$ el anillo de gérmenes de funciones holomorfas de $p \in \mathbb{C}^n$. También es una $\mathbb{C}$-álgebra.

Para un campo vectorial $f : \mathbb{C}^n \dashrightarrow \mathbb{C}^k$ especificado por

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^k \end{pmatrix}.$$

se define $\mathfrak{T}_f$ como el ideal generado por las f^s, esto es

$$\mathfrak{T}_f = \langle \{f^1, ..., f^k\} \rangle.$$

Así $\mathcal{Q}_f = \mathcal{O}_p / \mathfrak{T}_f$.

Resultará que este cociente es un espacio vectorial de dimensión finita bajo condiciones adecuadas.

El Número de Milnor es $\mu_p(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_f$.

0.2. Anillos, Localización y Variedades

[Osbaldo]

A partir de este momento, A denotará a un anillo, todos nuestros anillos serán conmutativos con identidad la cual representaremos por 1_A o simplemente como 1. Una de las herramientas más importantes en la teoría de anillos es la localización. La localización se puede entender como la generalización del concepto de campo vectorial asociado a un dominio entero, tal y como explicamos a continuación.

Es bien sabido que si A es un dominio entero, entonces podemos construir un campo asociado, llamado campo de fracciones de A el cual es denotado por $K(A)$. El campo de fracciones asociado a A es el conjunto de clases de equivalencia en $A \times A \setminus 0$ definidas como Si $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A \times A \setminus 0$, diremos que están relacionados si y solo si $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Es un ejercicio verificar que esta relación es de equivalencia.

Así la clase de equivalencia del par (a_1, a_2) es denotada por $\frac{a_1}{a_2}$ y el conjunto de clases de equivalencia es denotado por $K(A)$. El lector puede verificar fácilmentes que $K(A)$ está dotado de dos operaciones, suma de fracciones y producto de fracciones y con estas operaciones el conjunto $K(A)$ tiene estructura de campo. Por tal motivo es conocido como el campo de fracciones.

Ahora bien, si consideramos un anillo A el cual cuenta con divisores de cero, es decir, no es un dominio entero. Entonces la construcción anterior no se puede realizar. La razón de esto es que si existen dos $a, b \in A \setminus \{0\}$ tales que $ab = 0$ entonces el producto no estará bien definido $\frac{a_0}{a}\frac{b_0}{b} = \frac{a_0 b_0}{ab} = \frac{a_0 b_0}{0}$ el cual no está definido.

De lo anterior podemos concluir que si A no es dominio entero, entonces $K(A)$ no existe. Sin embargo, queremos generalizar esta construcción y definirla sobre cualquier anillo. Esta generalización es el concepto de localización y es el punto centrar de esta sección. Para definir la localización de un anilllo A necesitaremos algunos conceptos previos.

Definición 8 *Sea A un anillo y $S \subseteq A$ un subconjunto, diremos que S es un subconjunto multiplicativamente cerrado si $1 \in S$ y y S es cerrado bajo el producto. Algunos ejemplos de conjuntos multiplicativos son los siguientes:*

Ejemplo 9
1. *Sea $a \in A$, definimos $S := \{a^n \in A \mid n \geq 0, entero\}$.*
2. *Si $\mathfrak{p} \subset A$ es un ideal primo, entonces $S := A \setminus \mathfrak{p}$.*

Ejercicio 10 *Demuestra que los ejemplos dados en Ejemplo 9 son efectivamente subconjuntos multiplicativamente cerrados.*

Una vez definido los subconjuntos multiplicativamente cerrados, podemos dar paso al proceso de localizar. Sea A un anillo y $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado, entonces consideramos el conjunto $A \times S$ y dos elementos $(a_1, s_1), (a_2, s_2) \in A \times S$. Diremos que ambos elementos están relacionados si y slo si existe un $s \in S$ tal que

$$(a_1 s_2 - a_2 s_1)s = 0$$

La clase de equivalencia de la pareja (a, s) será denotado por $\frac{a}{s}$ y el conjunto de clases de equivalencia será denotado por $S^{-1}A$.

Ejercicio 11
1. *Es un ejercicio verificar que la relación definida anteriormente es efectivamente una relación de equivalencia.*
2. *Las operaciones usuales de suma y producto de fracciones en $S^{-1}A$ está bien definido (no depende del representante de la clase).*
3. *El conjunto de clases de equivalencia $S^{-1}A$ dotado con la suma y producto usual de fracciones es un anillo.*

El anillo $S^{-1}A$ es llamado el anillo de fracciones de A con respecto a S.

Observación 12 *Cuando tomamos un anillo A y consideramos su anillo de fracciones con respecto a un conjunto multiplicativamente cerrado S entonces tenemos un homomorfismo de anillos*

$$A \longrightarrow S^{-1}A$$

definido como $a \mapsto \frac{a}{1}$

A continuación veremos algunos ejemplos de la localización de un anillo.

Ejemplo 13 *Si A es un anillo y $a \in A$ un elemento, entonces si definimos $S = \{a^n\}_{n\geq 0}$ entonces el anillo de fracciones de A con respecto a $S = \{a^n\}_{n\geq 0}$ será denotado por A_a.*

Ejemplo 14 *Sea $A = \mathbb{Z}$ un anillo y tomamos a $p \in \mathbb{Z}$ un número primo. El ideal generado por p es un ideal primo denotado por $\langle p\rangle$. Entonces tomemos $S := \mathbb{Z} \setminus \langle p\rangle$.*

De esta manera el anillo de fracciones de $\mathbb{Z}$ respecto a $S = \mathbb{Z} \setminus \langle p\rangle$ está determinado por

$$S^{-1}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \in A, \quad y \notin \langle p\rangle \right\}$$

Ejemplo 15 *Si A es un anillo y $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo. Si definimos $S := A \setminus \mathfrak{p}$. Entonces el anillo de fracciones de A con respectos a $S := A \setminus \mathfrak{p}$ es denotado por $A_{\mathfrak{p}}$.*

$$A_{\mathfrak{p}} := \left\{ \frac{a}{b} | a \in A,\ b \notin \mathfrak{p} \right\}$$

En este caso, el anillo de fracciones $A_{\mathfrak{p}}$ tiene la siguiente propiedad: El conjunto

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} := \left\{ \frac{a}{b} | a \in \mathfrak{p},\ b \notin \mathfrak{p} \right\}$$

es un ideal de $A_{\mathfrak{p}}$. Mas aún, es el único ideal no trivial que tiene $A_{\mathfrak{p}}$. En consecuencias el anillo $A_{\mathfrak{p}}$. tiene un solo ideal maximal y por lo tanto es un anillo local. Por lo tanto, el anillo $A_{\mathfrak{p}}$ es conocido como la localización de A en $\mathfrak{p}$.

Ejemplo 16 *Sea* $A := k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ *el anillo de polinomios en* n *variables y con coeficientes en el campo* k*. Tomemos el ideal maximal* $\mathfrak{m} \subseteq k[x_1, x_2, \dots x_n]$ *definido por* $\mathfrak{m} := \langle\{x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n\}\rangle$ *donde* $a_i \in k$*. Entonces tomamos la localización de* A *en* $\mathfrak{m}$*, es decir* $A_{\mathfrak{m}}$*.*
Si recordamos que un polinomio $f \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ *pertenece a* $\mathfrak{m}$ *si y solo si* $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$*, entonces tendremos lo siguiente:*

$$\mathfrak{m} = \left\{\frac{f}{g} \mid f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \ \wedge \ g(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0, \right\}$$

Así podemos decir que $\mathfrak{m}$ es el conjunto de cocientes de polinomios que se anulan en $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in k^n$.

0.2.1. Topología de Zariski

Sea k un campo algebraicamente cerrado, denotaremos el conjunto k^n como $\mathbb{A}^n$. La razón de hacer esto es porque al conjunto k^n lo dotaremos de una topología llamada Topología de Zariski. Por otra parte, tomamos $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables. Sea $f \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ es un polinomio y $p = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$, decimos que p es un cero (raíz) de f si $f(p) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$. El conjunto de todos los ceros de f será denotado como $Z(f)$. Es decir:

$$Z(f) := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n \mid f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0\}$$

En general, si $\{f_1, f_2, \dots f_r\}$ es un conjunto finito de polinomios en $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ entonces

$$Z(f_1, f_2, \dots f_r) := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n \mid f_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \ \forall i = 1, 2, \dots, r\}$$

De esta manera, $Z(f_1, f_2, \dots, f_r)$ es el conjunto de ceros o raíces comunes a todos los polinomios f_i. A partir de este conjunto de ceros tenemos el siguiente concepto

Definición 17 *Un conjunto algebraico en* $\mathbb{A}^n$ *es el conjunto de ceros comunes a un número finito de polinomios en* n *variables. Esto es, los conjuntos algebraicos son de la forma* $Z(f_1, f_2, \dots, f_r)$ *con* $f_i \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$*son llamados conjuntos algebraicos. Si un conjunto algebraico es irreducible, entonces le llamaremos variedad algebraica.*

Los conjuntos algebraicos satisfacen la siguiente condición:

1. $Z(\emptyset) = \mathbb{A}^n$. Así todo el conjunto $\mathbb{A}^n$ es algebraico

2. $Z(1) = \emptyset$. En consecuencia, $\emptyset$ es un conjunto algebraico.

3. Si $V = Z(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ y $W = Z(g_1, g_2, \ldots, g_t)$ son dos conjuntos algebraicos en $\mathbb{A}^n$, entonces

$$V \cup W = Z(\{f_i g_j \mid i = 1, 2, \ldots, r \ \wedge \ j = 1, 2, \ldots, t\}).$$

   De lo cual podemos deducir que la unión finita de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico.

4. Si $\{V_i\}_{i \in I}$ una colección arbitraria de conjuntos algebraicos. Entonces $\bigcap_{i \in I} V_i$ es un conjunto algebraico.

Observación 18 *Para demostrar el punto número 4 de la lista anterior, es necesario recordar que el anillo de polinomios $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ es Noetheriano y así todo ideal de polinomios es finitamente generado. De esta manera si $E \subseteq k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, es un subconjunto (no necesariamente finito) entonces se cumple*

$$Z(E) = Z(\langle E \rangle) = Z(h_1, h_2, \ldots, h_t)$$

donde el ideal $\langle E \rangle$ es finitamente generado por el conjunto finito de polinomios $h_i \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

En consecuencia si $V_i = Z(E_i)$ para todo $i \in I$, entonces $\bigcap V_i = Z(\bigcup E_i)$. Por lo tanto, la intersección de una colección arbitraria de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico.

Definición 19 *Sea τ la colección de todos los conjuntos algebraicos en $\mathbb{A}^n$. Decimos que un subconjunto $C \subseteq \mathbb{A}^n$ es cerrado, si y solo si C es un conjunto algebraico en $\mathbb{A}^n$.*

Proposición 20 *La colección τ es una topología para $\mathbb{A}^n$, llamada topología de Zariski. De esta manera el espacio topológico $(\mathbb{A}^n, \tau)$ es es llamado el n-espacio afín.*

Como vimos en la Observación 18, todo conjunto algebraico tiene asociado un ideal un ideal,

$$V = Z(E) = Z(\langle E \rangle) = Z(J)$$

donde $J := \langle E \rangle$. En consecuencia denotamos por $\mathcal{I}(V)$ al siguiente conjunto

$$\mathcal{I}(V) : \{f \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \mid f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V\}$$

este conjunto es un ideal y le llamamos el ideal asociado a V. Por otra parte si $J \subseteq k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ es un ideal, entonces podemos definir $Z(J)$ como el conjunto algebraico asociado a J.

Ejercicio 21 *Demuestra que si V, W son dos conjuntos algebraicos tales que $V \subseteq W$, entonces $\mathcal{I}(W) \subseteq \mathcal{I}(V)$*

El siguiente resultado es muy importante en Geometría Algebraica clásica y es conocido como el Teorema de los ceros de Hilbert

Teorema 22 (Teorema de los Ceros de Hilbert) *Si $V = Z(J)$ es un conjunto algebraico, entonces $\mathcal{I}(Z(J)) = \sqrt{J}$.*

Corolario 23 *Las siguientes afirmaciones se cumplen*

1. *Existe una relación biúnivoca entre los conjuntos algebraicos de $\mathbb{A}^n$ y los ideales radicales en $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.*

2. *Existe una relación biúnivoca entre las variedades de $\mathbb{A}^n$ y los ideales primos en $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.*

3. *Existe una relación biúnivoca entre puntos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en $\mathbb{A}^n$ y los ideales maximales $\langle x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n \rangle$ en $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.*

De lo anterior podemos deducir que si $V = Z(J)$ es una variedad, entonces J es un ideal primo y así $J = \sqrt{J}$, por lo tanto $\mathcal{I}(V) = \mathcal{I}(Z(J)) = \sqrt{J} = J$. Por esta razón de ahora en adelante consideraremos solo variedades.

El Teorema de los Ceros de Hilbert establece una relación entre los conjuntos algebraicos de $\mathbb{A}^n$ y los ideales en $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Además, tenemos una relación entre ideales y k-álgebras finitamente generadas, esto es.

Si $J \subseteq k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ es un ideal, entonces podemos tomar el cociente

$$\frac{k[x_1, x_2, \ldots, x_n]}{J}$$

este cociente es una k-álgebra finitamente generada. Por otra parte, si B es una k-álgebra finitamente generada, entonces existe un ideal I tal que

$$B := \frac{k[x_1, x_2, \ldots, x_n]}{I}.$$

Observando esto tenemos lo siguiente: Si V es un conjunto algebraico e $\mathcal{I}(V)$ su ideal asociado, entonces V tiene asociada una k-álgebra finitamente generada la cual es denotada como

$$A(V) := \frac{k[x_1, x_2, \ldots, x_n]}{\mathcal{I}(V)}$$

y es llamado el anillo de coordenadas de V. Este nombre se debe a que si $f, g \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ y $[f], [g] \in A(V)$, entonces $[f] = [g]$ si y solo si $f - g \in \mathcal{I}(V)$. Equivalententemente, $[f] = [g]$ si y solo si $(f - g)(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ si y solo si $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = g(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Ello significa que si pensamos en f, g como funciones (polinomiales)

$$f, g : V \to k$$

entonces ambas funciones están relacionados si y solo si ambas funciones son iguales en todos los puntos de V.

De lo anterior concluimos lo siguiente: Dada una variedad V todo polinomio $f \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ determina una función $f : V \to k$, las cuales son conocidas como funciones polinomiales. Sin embargo existen muchos polinomios que, aún cuando son diferentes, determinan la misma función. Para evitar esto consideramos el anillo de coordenadas.

Como vimos anteriormente, toda variedad V tiene asociado un ideal ideal $\mathcal{I}(V)$, el cual a su vez determina el anillo de coordenadas $A(V) := \frac{k[x_1, x_2, \ldots, x_n]}{\mathcal{I}(V)}$. Además tenemos un homomorfismo de anillos

$$\pi : k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \longrightarrow A(V)$$

Es sabido que los ideales en $A(V)$ corresponden de manera biúnivoca con ideales en $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ que continen a $\mathcal{I}(V)$. De manera particular, los ideales maximales en $A(V)$ corresponden a ideales maximales en $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ que continen a $\mathcal{I}(V)$. Así, por el Ejercicio 21, $\mathfrak{m} = \langle x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n \rangle$ en $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ es un ideal maximal que contiene $\mathcal{I}(V)$ si y solo si $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V$. Por lo tanto, los ideales maximales en $A(V)$ son ideales de la forma $\bar{\mathfrak{m}} = \langle \bar{x_1} - \bar{a_1}, \bar{x_2} - \bar{a_2}, \ldots, \bar{x_n} - \bar{a_n} \rangle$ tales que $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V$. Esto es, los maximales en $A(V)$ corresponden a puntos en V.

0.2.2. Interpretación de la Localización en la Topología de Zariski.

En esta sección hablaremos de las propiedades que se obtienen en las funciones polinomiales al considerar la localización del anillo de coordenadas asociado a una variedad V.

Tomemos un punto $p = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V$ y sea $\bar{\mathfrak{m}}_p = \langle \bar{x_1} - \bar{a_1}, \bar{x_2} - \bar{a_2}, \ldots, \bar{x_n} - \bar{a_n} \rangle$ su ideal maximal asociado, donde $\bar{\mathfrak{m}}_p \subseteq A(V)$. Consideramos $A(V)_{\bar{\mathfrak{m}}_p}$ la localización de $A(V)$ con respecto a $\bar{\mathfrak{m}}_p$. De lo cual tenemos que

$$A(V)_{\bar{\mathfrak{m}}_p} := \left\{ \frac{\bar{f}}{\bar{g}} \mid \bar{f}, \bar{g} \in A(V) \ \wedge \ \bar{g} \notin \bar{\mathfrak{m}}_p \right\}$$

De esta manera, como los elementos de $A(V)$ correspondian a funciones polinomiales definidas en V, entonces los elementos de $A(V)_{\bar{\mathfrak{m}}_p}$ corresponden a cocientes de funciones polinomiales definidas en V. Mas aún, como $\bar{g} \notin \bar{\mathfrak{m}}_p$ equivale a decir que $\bar{g}(a_1, a_2, \ldots a_n) \neq$ entonces podemos decir que los elementos en $A(V)_{\bar{\mathfrak{m}}_p}$ corresponden a cocientes de funciones polinomiales que están bien definidas en el punto p.

Por otra parte tenemos la siguiente cadena de homomorfismos de anillos.

$$k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \to A(V) \to A(V)_{\bar{\mathfrak{m}}_p}$$

la composición es un homomorfismo de anillos definido como $f \mapsto \frac{\bar{f}}{\bar{1}}$ la función $\frac{\bar{f}}{\bar{1}}$ es conocida como el gérmen de la función f alrededor del punto p.

0.3. Número de Milnor y Tjurina

[filtraciones]

Sea A un anillo conmutativo con 1, una filtración en A es una familia de ideales $\{I_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de A tales que

i) $I_0 = A$.

ii) $I_{n+1} \subseteq I_n$.

iii) $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$.

Entonces un anillo con una filtración se llama anillo filtrado.

Si A es un anillo e I un ideal de A, la filtración I-ádica está dada por $\{I^n\}_{n\geq 0}$.

Ejemplo 24 *Filtración trivial*

$$A = \begin{cases} A & si\ n = 0, \\ 0 & si\ n > 0. \end{cases}$$

Ejemplo 25 *Sea A un anillo e I un ideal, la filtración I-ádica de A, es la sucesión de ideales $\{I^n\}_{n\geq 0}$..*

Dada una filtración $\{I_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en una anillo A, se puede definir una función de orden de la siguiente forma:

$$\nu(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in I_n \text{ y } x \notin I_{n+1}, \\ \infty & \text{si } x \in \bigcap I_n. \end{cases}$$

Así se tienen las siguientes propiedades

1) $\nu(x + y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}$.

2) $\nu(xy) \geq \nu(x) + \nu(y)$.

Ejercicio 26 *Demostrar las propiedades anteriores.*

Si $\bigcap I_n = \{0\}$, entonces con esta función orden se puede definir una métrica.

$d : A \times A \to \mathbb{R}$ definida como $d(x, y) = \rho^{\nu}(x - y)$, donde $0 < \rho < 1$.

Ejercicio 27 *Demostrar que la función d satisface la desigualdad ultramétrica:*

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(y, z)\}.$$

Adicionalmente probar que d es una métrica.

Un anillo con una filtración se dice completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy converge con la topología inducida por la métrica asociada a la filtración. Además todo anillo con una filtración se puede completar, es decir existe un anillo completo $\widehat{A}$ y un morfismo inyectivo de anillos

$$\varphi : A \to \widehat{A}$$

tal que la imagen es densa en $\widehat{A}$. La construcción de esta completación es igual que en el caso de análisis, se consideran las sucesiones de Cauchy sobre A, se define una suma y producto de sucesiones, con esta operación este conjunto de sucesiones es un anillo. Después, el conjunto $\mathfrak{m}$ de sucesiones que convergen a cero (sucesiones nulas) es un ideal del anillo de sucesión de Cauchy. Entonces se demuestra que el anillo cociente es una completación de A.

La completación también se puede describir algebraicamente como un límite inverso de anillos

$$\widehat{A} := \varprojlim_{m} A/I_n.$$

Ejemplo 28 *Consideremos la filtración p-ádica $\{p^n\mathbb{Z}\}_{n\geq 0}$ de $\mathbb{Z}$. Consideremos los anillos*

$$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}.$$

junto con los morfismos naturales

$$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$$

siempre que $n \geq m$. Entonces se tiene el sistema inverso

$$\cdots \to \mathbb{Z}/p^n + 1\mathbb{Z}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \cdots \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

La completación p-ádica de $\mathbb{Z}$, es el anillo de enteros p-ádicos

$$\mathbb{Z}_p := \varprojlim_{m} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

Ejemplo 29 *Si $I \subseteq A$ es un ideal, para la filtración I-ádica, la completación de A es*

$$\widehat{A} := \varprojlim_{n} A/I^n$$

y se llama la completación I-ádica.

Ejemplo 30 *Consideremos el anillo de polinomios en n variables con coeficientes en un anillo A, $A[x_1, \ldots, x_n]$, y el ideal $\mathfrak{m} = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ La completación $\mathfrak{m}$-ádica es el anillo de series de potencias formales con coeficientes en A denotado con $A[[x_1, \ldots, x_n]]$.*

0.4. Anillos locales y singularidades

Definimos el anillo local de gérmenes en p como el anillo

$$\mathcal{O}_{X,p} = K[x_1, x_2 \dots x_n]_{\langle x_1-p_1, x_2-p_2, \dots, x_n-p_n\rangle},$$

El anillo local analítico de una variedad X en p es la completación $\langle x_1 - p_1, x_2 - p_2, \dots, x_n - p_n\rangle$-ádica

$$\mathcal{O}^{an}_{X,p} := \widehat{\mathcal{O}}_{X,p} = K[[x_1-p_1, x_2-p_2, \dots, x_n-p_n]]/I(X)\cdot K[[x_1-p_1, x_2-p_2, \dots, x_n-p_n]].$$

Lema 31 *Sea $\mathcal{O}_{X,p}$ el anillo local de una variedad en $p \in X$ y sea $I \subset \mathcal{O}_{X,p}$ un ideal tal que $dim_K(\mathcal{O}_{X,p}) < \infty$. Entonces como k-álgebras locales,*

$$\mathcal{O}_{X,p}/I \cong \mathcal{O}^{an}_{X,p}/I\mathcal{O}^{an}_{X,p}.$$

Definición 32 *Un polinomio $f \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ tiene un punto crítico aislado p, si p es un punto aislado de $V(\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \dots, \partial f/\partial x_n)$. Un punto p es una singularidad aislada de una hipersuperficie $V(f) \subseteq \mathbb{A}^n_K$ si p es un punto aislado de $V(f, \partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \dots, \partial f/\partial x_n)$.*

Definición 33 *Definimos el número de Milnor como*

$$\mu(f,p) := dim_K\left(K[[x_1 - p_1, x_2 - p_2, \dots, x_n - p_n]]/\left\langle \partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \dots, \partial f/\partial x_n\right\rangle\right).$$

Definición 34 *Definimos el número de Tjurina number of f en p.*

$$\tau(f,p) := dim_K\left(K[[x_1 - p_1, x_2 - p_2, \dots, x_n - p_n]]/\left\langle f, \partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \dots, \partial f/\partial x_n\right\rangle\right)$$

Notemos que

- $\mu(f,p) = 0$ si y sólo si p no es un punto crítico de f.
- $\tau(f,p) = 0$ si y sólo si p no es un punto singular de f.

Definición 35 *Se dice que $f \in \mathbb{K}[x]$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, tiene un* **punto crítico aislado** *en p. Si p es un punto aislado de $V(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n})$. Además, p es una* **singularidad** *aislada de f o de $V(f) \subset A^n_k$, si p es un punto aislado de $V(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n})$.*

Definición 36 *(El número de milnor y el número de tjurina.)*

$$\mu(f,p) := dim_K(K(x_1-p,\cdots x_n-p)/\langle \frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\rangle)$$

$$\tau(f,p) := dim_K(K(x_1-p,\cdots x_n-p)/\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\rangle)$$

Los números de milnor y tjurina se pueden calcular fijando un orden monomial calculado la base de Groebner de $\langle \frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\rangle)$ *y de* $\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\rangle)$*, respectivamente.*

Proposición 37 *Si p es una singularidad aislada de $V(f)$, entonces $\mu(f,p)$ y $\tau(f,p)$ son finitos.*

0.5. Teorema de Poincaré-Hopf y unas aplicaciones.

En esta parte, veremos como convergen los conceptos de Índice de de Poincaré Hopf y el número de Milnor. De paso veremos que el número de Milnor como el número de Tjurina tienen una interesante aplicación en el concepto de puntos críticos y puntos singulares. Damos un ejemplo con singular y su interpretación, caso local y global.
Recordemos algunos conceptos básicos. Si X y Y son espacios topológicos y $f,g : X \to Y$ son mapeos suaves, entonces una **homotopía** entre f y g es una función suave $F : [0,1]\times X \to Y$ tal que $F(0,x) = f$ y $F(1,x) = g$, entonces se dice que $f \sim g$ es decir f y g son homotópicos.

Definición 38 *El* **grado** *del mapeo f es el $deg(f) = deg(f,q)$, donde $q \in Y$ es un valor regular de f.*

Un resultado clásico es el siguiente teorema para su desmostración, (ver [Lima 1]).

Teorema 39 *Si $f \sim g$. Entonces $deg(f) = deg(g)$.*

Para el siguiente teorema requerimos poner las siguientes condiciones. Supongamos que X es una variedad compacta orientada y con frontera ∂X y Y una variedad orientada y conexa. Sea $f : \partial X \to Y$ un mapeo suave, entonces tenemos el siguiente resultado

Teorema 40 *Si f admite una extensión digamos $F : X \to Y$, entonces $deg f = 0$.* ***Demostración:*** *Ver [Milnor]* $\blacksquare$

Consideremos el conjunto $\bar{B}_\epsilon(p) := \{z \in \mathbb{C} : |z - p| \leq \epsilon\}$. Además, ϵ es tal que, p es el único punto que es raíz de f.

Teorema 41 *$\mathcal{I}_0(f)$ es el número de puntos de $\bar{B}_\epsilon(p) \cap f^{-1}(\varsigma)$, donde ς es un punto regular de f, tal que $\varsigma \gg 0$.*

Demostración: Si $z \in S^{2n-1}_\epsilon(p)$ con $f^{-1}(t\varsigma) \cap S^{2n-1}_\epsilon(p) = \emptyset,\ \ t \in [0, 1]$. Así, obtenemos

$$F(t, z) = \frac{f(z) - t\varsigma}{|f(z) - t\varsigma|},$$

la cual define una homotopía entre $\frac{f-\varsigma}{|f-\varsigma|}$ y $\frac{f}{|f|}$. Entonces, $\mathcal{I}_p(f) = deg \frac{f-\varsigma}{|f-\varsigma|}$. Consideremos $\{\xi_1, \cdots \xi_k\} = f^{-1}(\varsigma) \cap B_\epsilon(p)$. Si elegimos las esferas centradas en ξ_i tales que $S^{2n-1}_{\delta_j}(\xi_j)$ y $S^{2n-1}_{\delta_j}(\xi_j) \cap S^{2n-1}_{\delta_j}(p) = \emptyset$. Sea $X = \bar{B}_\epsilon(p) \setminus \cup_{j=1}^k B_{\delta_j}(\xi_j)$, la cual es una variedad orientada, cuya frontera ∂X, esta dada por

$$\partial X = S^{2n-1}_\epsilon \sqcup S^{2n-1}_{\delta_j} \sqcup \cdots \sqcup S^{2n-1}_{\delta_k}(\xi_k)$$

donde, el mapeo $\varphi = \frac{f-\varsigma}{|f-\varsigma|} : \partial X \to S^{2n-1}_1(0)$ admite una extensión a X. de la proposición 40 $deg(\varphi) = 0$. Como X es una variedad orientada se sigue que, $deg(\varphi) = \mathcal{I}_p(f) - \mathcal{I}_{\xi_1}(f - \varsigma) - \cdots - \mathcal{I}_{\xi_k}(f - \varsigma)$. Luego

$$\mathcal{I}_p(f) = \mathcal{I}_{\xi_1}(f - \varsigma) + \cdots + \mathcal{I}_{\xi_k}(f - \varsigma).$$

$\blacksquare$

Definición 42 *Sean $f, g : (\mathbb{C}^n, p) \to \mathbb{C}$ mapeos de gérmenes. Se dice que f es* **A- equivalente** *a g, ($f \sim_A g$). Si exíste un un mapeo de gérmenes holomorfos $A : (\mathbb{C}^n, p) \to GL(n, \mathbb{C})$ tal que*

$$f(z) = A(z)g(z).$$

Definición 43 *Sea $\gamma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un mapeo definido por, $\gamma^J = (z_1^{j_1}, \cdots z_n^{j_n})$, con $J = (j_1, \cdots, j_n) \in \mathbb{N}^n$, $j_k \geq 0,\ 1 \leq k \leq n$. Al mapeo γ se le conoce como el mapeo de* **pham**.

Proposición 44 *Sea* $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$*, un germen con multiplicidad* μ *en* 0*. Considera el mapeo de Pham* $\gamma^{\mu+1}$*,* $[\mu+1] = \underbrace{(\mu+1, \cdots, \mu+1)}_{n-componentes}$ *y la deformación holomorfa* $\gamma_\lambda^{[\mu+1]} = \gamma^{[\mu+1]} + \lambda f$*,* λ *es una pequeña vecindad de* 0 *en* $\mathbb{C}$*. Entonces* f *es A-equivalente a* $\gamma_\lambda^{[\mu+1]}$*, para* $\lambda \neq 0$*.*

Lema 45 *El mapeo de pham* γ*, satisface* $\mu_0(\gamma^J) = \mathcal{I}_0(\gamma^J)$*.*

Proposición 46 *Si* $f, g : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n)$ *mapeos* $A-$ *equivalentes tales que* $f^{-1}(f(p)) = \{p\}$*, entonces* $\mathcal{I}_p(f) = \mathcal{I}_p(g)$*.*

Demostración: Recordemos que $GL(n, \mathbb{C}) = M(n, \mathbb{C}) \setminus det^{-1}(0)$. Consideremos ahora, una vencidad contractible $V \subset GL(n, \mathbb{C})$ de $A(p)$. lo cual garantiza que existe una homotopía, digamos $G(t, z)$ tal que $G(0, z) = A(z)$ y $G(1, z) = A(p)$, entonces

$$\frac{G(t, z)g(z)}{|G(t, z)g(z)|},$$

define una homotopía entre $\frac{f(z)}{|f(z)|} = \frac{A(z)g(z)}{|A(z)g(z)|}$ y $\frac{A(z)g(z)}{|A(z)g(z)|}$. Por otro lado, podemos definir una curva suave $\gamma \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que $\gamma(0) = A(p)$ y $\gamma(1) = I$. Entonces $\frac{\gamma(t)g(z)}{|\gamma(t)g(z)|}$ la cual define una homotopía entre $\frac{A(p)g(z)}{|A(p)g(z)|}$ y $\frac{g(z)}{|g(z)|}$. ■

Proposición 47 *Si* f, g *son mapeos de gérmenes de mapeos homomorfos* $A-$ *equivalentes, entonces* $\mu(f) = \mu(g)$*.*

Proposición 48 *Sea* $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ *un mapeo de gérmenes holomorfos, con multiplicidad finita* μ_0*. Si* f_λ *es la deformación de* f*,* $\lambda \in \mathbb{C}^m$*,,* $f_0 = f$*. Entonces existe una vencidad* $U \subset \mathbb{C}^n$ *de* 0*, tal que* $\mu(f) \geq \mathcal{Q}_{f_\lambda}(U)$*.*

Proposición 49 *El número de soluciones en* U*, contando multiplicidades, de la ecuación* $f = 0$ *esta acotada por* $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{Q}_f(U)$ *i.e.* $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{Q}_f(U) \geq \sum_{i=1}^k dim_{\mathbb{C}}\mathcal{Q}_{\xi_i, f}$*.*

Proposición 50 *Sea* $X \subset \mathbb{C}^n$ *una variedad compacta conexa y con frontera,* $dim_{\mathbb{R}}X = 2n$*. Sea* $f : U \to \mathbb{C}^n$*, con* U *abierto conexo contenido en* X*,* $p \in X \setminus \partial X$*,* $f(p) = 0$ *y* $f^{-1}(0) \cap \partial X = \emptyset$*. Si el mapeo*

$$\varphi : \partial X \to S_1^{2n-1}(0)$$

entonces, $deg(\varphi) = \sum_i \mathcal{I}_{\xi_i}(f)$*. Donde,* $\{\xi_i\}_{i=1,\cdots k}$ *tal que* $f(\xi_i) = 0$*.*

Demostración: Supongamos que existen $\{\xi_1, \cdots, \xi_{k+1}\}$, $(k+1)$ - puntos distintos que cumplen $f(\xi_i) = 0$. Elijamos esferas $S^{2n-1}_{\delta_j}(\xi_j)$, con $S^{2n-1}_{\delta_j} \cap \partial X = \emptyset$. Consideremos la variendad orientada $\tilde{X} = X \setminus \bigcup_{j=1}^{k+1} B_{\delta_j}(\xi_j)$ cuya frontera es la union disjunta

$$\partial X = \partial X \sqcup S^{2n-1}_{\delta_1}(\xi_1) \sqcup \cdots \sqcup S^{2n-1}_{\delta_{k+1}}(\xi_{k+1}).$$

Si tomamos la orientación de $\tilde{X}$, se sigue $deg(\tilde{\varphi}) = deg(\varphi) - \mathcal{I}_{\xi_1}(f) - \cdots - \mathcal{I}_{\xi_{k+1}}(f)$. El mapeo $\tilde{\varphi} : \partial\tilde{X} \to S^{2n-1}_1(0)$, extiende de manera suave a X, de donde el $deg(\tilde{\varphi}) = 0$. Luego, $deg(\varphi) = \mathcal{I}_{\xi_1}(f) + \cdots + \mathcal{I}_{\xi_{k+1}}(f)$. ■

Proposición 51 *Sea $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, p)$ un gérmen de mapeos holomórfos f_λ deformación holomorfa de f_0. Entonces $\mathcal{I}_0(f) = \sum_{\xi_i \in f_\lambda^{-1}(0)} \mathcal{I}_{\xi_i}(f_\lambda)$.*

Proposición 52 *Sea $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ es un mapeo de germen de mapeos holomorfos, tal que $\mu_0(f) < \infty$. Entonces $\mu_0(f) \geq \mathcal{I}_0(f)$.*

Teorema 53 (Teorema de Poincaré-Hopf.) *Sea $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ un mapeo de gérmenes de funciones homolomorfas, tal que $\mu_0(f) < \infty$. Entonces*

$$\mu_0(f) = \mathcal{I}_0(f).$$

Demostración: *Consideremos el mapeo de pham $\gamma^{[\mu+1]}$, con $\mu = \mu_0(f)$, de (44) la deformación del mapeo de pham $\gamma^{[\mu+1]}_\lambda$ y f son A- equivalentes. Además de (46) se sigue que*

$$\mathcal{I}_0(\gamma^{[\mu+1]}_\lambda) = \mathcal{I}_0(f)$$

y de 44, (47), obtenemos $\mu_0(\gamma^{[\mu+1]}_\lambda) = \mu_0(f)$. Por otro lado, si fijamos una $B_\epsilon(0)$ y el valor del parámetro λ de tal forma que se cumplan las hipótesis de la proposición 48 se cumplen, entonces

$$\mu_0(\gamma^{[\mu+1]}_\lambda) \geq dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{\gamma^{[\mu+1]}_\lambda}(B_\epsilon(0)).$$

Sean $\{\xi_i\}$ las soluciones de $\gamma^{[\mu+1]}_\lambda = 0$ en la $B_\epsilon(0)$. Por (49) se sigue que

$$dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{\gamma^{[\mu+1]}_\lambda}(B_\epsilon(0)) \geq \sum_i \mu_{\epsilon_i}(\gamma^{[\mu+1]}_\lambda)$$

de (52) se sigue que

$$\mu_{\xi_i}(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}) \geq \mathcal{I}_{\xi_i}(\gamma_\lambda^{[\mu+1]})$$

Si restringimos el mapeo a la $\partial B_\epsilon(0)$ de 50 se sigue que:

$$\sum_i \mathcal{I}_{\xi_i}(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}) = deg\frac{\gamma_{\lambda^{[\mu+1]}}}{|\gamma_\lambda^{[\mu+1]}|}.$$

Considerando (46) obtenemos

$$deg\frac{\gamma_\lambda^{[\mu+1]}}{|\gamma_\lambda^{[\mu+1]}|} = deg\frac{\gamma^{[\mu+1]}}{|\gamma^{[\mu+1]}|} = \mathcal{I}_0(\gamma^{[\mu+1]}).$$

De 45, se sigue que

$$\mathcal{I}_0(\gamma^{[\mu+1]}) = \mu_0(\gamma^{[\mu+1]})$$

Dado que

$$\sum_i \mu_{\xi_i}(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}) \geq \sum_i \mathcal{I}_{\xi_i}(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}).$$

Además,

$$\mu_{\xi_i}(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}) \geq \mathcal{I}_{\xi_i}(\gamma_\lambda^{[\mu+1]})$$

y como todos los términos son positivos, tenemos

$$\mu_{\xi_i}(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}) = \mathcal{I}_{\xi_i}(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}), \quad Para\ todo\ i.$$

Pero, 0 es una de las soluciones $\xi_i = 0$ de la ecuación $\gamma_\lambda^{[\mu+1]} = 0$, luego

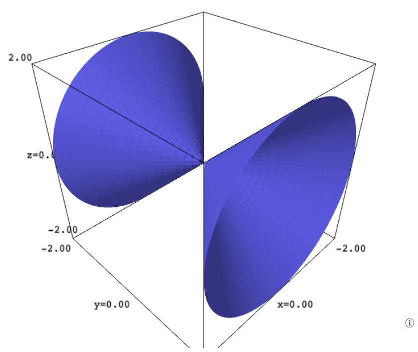
$$\mu_0(f) = \mu_0(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}) = \mathcal{I}_0(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}) = \mathcal{I}_0(f).$$

■

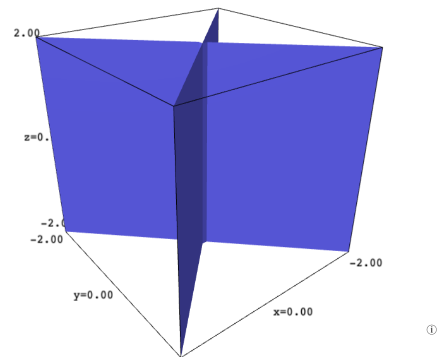
0.6. Comparación caso local y global

En esta sección vemos como actúan las propiedades globales y locales, para verificar la existencia de puntos críticos y singularidades fuera del 0. Para ello recordemos que

Definición 54 *Si $f \in \mathbb{K}[x], x = (x_1, \cdots, x_n)$ tiene un* **punto crítico aislado** *en p, si p es un punto aislado de $V(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$. Además, decimos que p es una* **singularidad aislada** *de f o de la hipérsuperficie $V(f) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, si p es un punto aislado de $V(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$.*



(a) Singularidad aislada



(b) Singularidad no-aislada

Ejemplo 55 *A continuación, utilizaremos el paquete singular, donde podemos observar que en el caso del anillo local y el anillo affine y si calculamos el número de Milnor y el Tjurina, tienen una interpretación para la función* $f = x^7 + y^7 + (x - y)^2 x^2 y^2 + z^2$, *respecto a los puntos críticos y puntos singulares.*

```
LIB "sing.lib";
ring r=0,(x,y,z),ds; // anillo local
poly f=x7+y7+(x-y)2x2y2+z2;
milnor(f);
//-> 28  // El número de Milnor en 0
tjurina(f);
// -> 24 // El número de Tjurina en 0

ring R=0,(x,y,z),dp; // anillo afine
poly f=x7+y7+(x-y)2x2y2+z2;
milnor(f);
//-> 36 // El número de Milnor en 0
tjurina(f);
// -> 24 // El número de Tjurina en 0
```

Como podemos ver la diferencia entre el número de Milnor local y global es 8. Entonces, f *definida como en el programa tiene ocho puntos críticos fuera de* 0.
Por otro lado, dado que en el cálculo de número de $Tjurina$ *no se mues-*

tran cambios para el caso local y global. Entonces la $V(f)$ solo tiene una singularidad aislada en el 0.