Simetrías y Factores Integrantes para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Mtra. Elba Lilia de la Cruz García, Dr. Alexander Yakhno, Dra. Liliya Yakhno

Ecuaciones diferenciales de primer orden

En primer lugar, recordaremos algunos hechos conocidos de la teoría de simetrías puntuales para ecuaciones diferenciales de primer orden

(1) $$\beta(x,y)dx - \alpha(x,y)dy = 0 \sim \frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta}$$

o en su forma normal

$$F := y' - f(x,y) = 0, \quad f(x,y) := \beta/\alpha.$$

Notemos que el problema de resolver la EDO (1) es equivalente a determinar un invariante del operador $A := \alpha\,\partial_x + \beta\,\partial_y$, es decir, una función $\omega = \omega(x,y)$ tal que

$$A(\omega) = 0.$$

Entonces $\omega = ctte.$ es la integral general de (1).

La forma estándar de encontrar la simetría puntual

$$S = \xi(x,y)\,\partial_x + \eta(x,y)\,\partial_y$$

es aplicar la primera prolongación de S

$$\underset{1}{S} = S + \zeta\,\partial_{y'}, \quad \zeta = D_x(\eta) - y'D_x(\xi), \quad D_x = \partial_x + y'\,\partial_y$$

a la ecuación $F = 0$

(2) $$\underset{1}{S}(F)\Big|_{F=0} = 0$$

y resolver la ecuación diferencial parcial de primer orden para las incógnitas ξ y η.

Teniendo en cuenta que $D_x|_{F=0} = A/\alpha$, el criterio (2) toma la forma

(3) $$\frac{S(\alpha) - A(\xi)}{\alpha} = \frac{S(\beta) - A(\eta)}{\beta}.$$

Si consideramos la relación para el conmutador:

$$[S, A] = \lambda(x, y)A, \tag{4}$$

entonces, excluyendo la función λ, obtendremos exactamente la ecuación (3). Obviamente hay una simetría trivial de la forma $S^0 = \delta(x, y)A$ para cualquier función suave δ, porque la igualdad anterior (4), se cumple para $\lambda = -A(\delta)$.

Si se conoce una simetría no trivial S, entonces la aplicación de (4) a la integral ω conduce a

$$S\big(A(\omega)\big) - A\big(S(\omega)\big) = -A\big(S(\omega)\big) = \lambda A(\omega) = 0,$$

entonces $S(\omega) = h(\omega)$ para alguna función h. Así, la integral ω satisface el sistema de dos ecuaciones algebraicas para ω_x, ω_y:

$$\begin{array}{rcl} A(\omega) & = & \alpha\omega_x + \beta\omega_y = 0, \\ S(\omega) & = & \xi\omega_x + \eta\omega_y = h(\omega). \end{array} \tag{5}$$

El determinante de este sistema $\Delta := \beta\xi - \alpha\eta$ es diferente de cero, por lo tanto

$$d\omega = h(\omega)\left(\frac{\beta}{\Delta}dx - \frac{\alpha}{\Delta}dy\right) = 0.$$

Al verificar que la siguiente condición para $\mu := 1/\Delta$ sea factor integrante para (1)

$$\left(\frac{\beta}{\Delta}\right)_y = -\left(\frac{\alpha}{\Delta}\right)_x \tag{6}$$

conduce a la expresión (3). Así, para obtener una simetría S se pueden utilizar relaciones equivalentes: (2), (4) o (6). Esta conexión refleja el hecho bien conocido de que el problema de encontrar una simetría puntual de (1) tiene la misma dificultad de encontrar su factor integrante.

Si se conoce un factor de integración μ para (1) al expresar $\xi = \Delta/\beta + \alpha\eta/\beta$ obtenemos

$$S = (\Delta/\beta + \alpha\eta/\beta)\,\partial_x + \eta\,\partial_y = \frac{\Delta}{\beta}\partial_x + \frac{\eta}{\beta}A =: S^x + S^0,$$

y para $\eta = \beta\xi/\alpha - \Delta/\alpha$, por analogía obtenemos:

$$S = \xi\,\partial_x + (\beta\xi/\alpha - \Delta/\alpha)\,\partial_y = -\frac{\Delta}{\alpha}\partial_y + \frac{\xi}{\alpha}A =: S^y + S^0,$$

donde tenemos en cuenta que, $\frac{\eta}{\beta}A$ y $\frac{\xi}{\alpha}A$ son simetrías triviales S^0. Así que cualquier ecuación (1) con factor integrante $\mu = \mu(x, y)$ admite una simetría (llamémosla simetría canónica)

$$S^x = (\beta\mu)^{-1}\,\partial_x \quad o \quad S^y = (\alpha\mu)^{-1}\,\partial_y.$$

Consideremos ahora otra EDO diferente a (1), pero con el mismo factor integrante μ

(7) $$\tilde{\beta}(x,y)dx - \tilde{\alpha}(x,y)dy = 0,$$

donde $\alpha\tilde{\beta} - \beta\tilde{\alpha} \neq 0$. Entonces, la relación entre la simetría S^x para (1) y la simetría $\tilde{S}^x = \left(\tilde{\beta}\mu\right)^{-1} \partial_x$ para (7) es muy simple

$$\tilde{S}^x = \frac{\beta}{\tilde{\beta}} S^x.$$

Como ejemplo, consideremos dos ecuaciones. La primera es con coeficientes homogéneos

(8) $$2xdx - \frac{x^2}{y} dy = 0,$$

y la segunda es una ecuación lineal

(9) $$\left(\cos x - 2\frac{y}{x}\right) dx + dy = 0.$$

Ambas ecuaciones tienen el mismo factor integrante $\mu = x^{-2}$, por lo tanto, sus simetrías canónicas son:

$$S^x = \frac{x}{2}\partial_x, \quad \tilde{S}^x = \frac{x^3}{x\cos x - 2y}\partial_x.$$

Debido a la presencia en la simetría $S^0 = \delta(x,y)A$, es fácil demostrar que, dos ecuaciones cualesquiera con el mismo factor de integración, tienen en realidad la misma simetría. De hecho, de la igualdad

$$S = S^x + \delta A = \tilde{S}^x + \tilde{\delta}\tilde{A},$$

obtenemos

$$\tilde{\delta}\tilde{\beta} = \delta\beta, \quad \delta = \mu^{-1}\frac{1-\tilde{\beta}/\beta}{\alpha\tilde{\beta}-\beta\tilde{\alpha}}.$$

Por ejemplo, las ecuaciones (8) y (9) admiten:

$$S = \frac{x^2+y}{\cos x}\partial_x + \frac{2y(x^2+y) - xy\cos x}{x\cos x}\partial_y,$$

lo que arroja el mismo factor $\mu = x^2$ para ambas ecuaciones.

EJERCICIOS. Demostrar que las siguientes ecuaciones de primer orden admiten el operador indicado. Determinar el factor integrante, basándose en la simetría. Integrar las ecuaciones o reducir a las cuadraturas.

$$\mathbf{1.}\ \boldsymbol{y' = \frac{y}{x+\cos(y/x)}}, \qquad \boldsymbol{S = xy\partial_x + y^2\partial_y}.$$

Para determinar que $S = xy\,\partial_x + y^2\,\partial_y$ es admitido por la ecuación diferencial, podemos verificar que se cumple la ecuación (4). Entonces escribimos la ecuación diferencial dada en la forma (1):

(10) $$ydx - \big(x + \cos(y/x)\big)dy = 0,$$

de donde $\alpha = x + \cos(y/x)$ y $\beta = y$, por lo cual el operador A tiene la forma:

$$A = (\, x + \cos(y/x))\, \partial_x + y\, \partial_y.$$

Ahora procedemos a calcular el conmutador $[S, A] = S(A) - A(S)$:

$$S(A) = xy\left(1 + \frac{y}{x^2}\operatorname{sen}(y/x)\right)\partial_x + y^2\left(\left(-\frac{1}{x}\right)\operatorname{sen}(y/x)\right)\partial_x + y^2\,\partial_x = xy\,\partial_x + y^2\,\partial_x,$$

$$A(S) = (\, x + \cos(y/x))y\,\partial_x + xy\,\partial_x + 2y^2\,\partial_y,$$

entonces:

$$\begin{aligned}
[S, A] &= xy\,\partial_x + y^2\,\partial_y - xy\,\partial_x - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\partial_x - xy\,\partial_x - 2y^2\,\partial_y,\\
&= -y^2\,\partial_y - y\cos(y/x)\,\partial_x - xy\,\partial_x,\\
&= -y(x\,\partial_x + \cos(y/x)\,\partial_x + \mathrm{y}\,\partial_y),\\
&= -y((x + \cos(y/x))\,\partial_x + \mathrm{y}\,\partial_y),
\end{aligned}$$

de donde puede observarse que $[S, A] = -yA$ y así vemos que se cumple la ecuación (4). Por lo tanto $S = xy\,\partial_x + y^2\,\partial_y$ es un operador admitido por $y' = \frac{y}{x+\cos(y/x)}$.

Ahora obtenemos el determinante del sistema (5)

$$\Delta = y(xy) - \big(x + \cos(y/x)\big)y^2 = -y^2\cos(y/x),$$

lo que nos permite calcular $\mu = 1/\Delta$, sustituyendo: $\mu = \frac{-1}{y^2\cos(y/x)}$ es factor integrante.

Multiplicamos el factor integrante por la ecuación diferencial (10)

$$\frac{-dx}{\mathrm{y}\cos(y/x)} + \frac{\left(x + \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)dy}{y^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)} = 0,$$

la ecuación anterior es exacta ya que:

$$\left(\frac{-1}{\mathrm{y}\cos(y/x)}\right)_y = \frac{\cos\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\operatorname{sen}(y/x)}{y^2 cos^2(y/x)}$$

y, por otro lado:

$$\left(\frac{x + \cos(y/x)}{y^2\cos(y/x)}\right)_x = \frac{(y^2\cos(y/x))\big(1 + yx^{-2}\operatorname{sen}(y/x)\big) - (x + \cos(y/x))(y^3x^{-2}\operatorname{sen}(y/x))}{\big(\mathrm{y}^2\cos(y/x)\big)^2}$$

$$= \frac{y^2\cos(y/x) + y^3x^{-2}\cos(y/x)\mathrm{sen}(y/x) - y^3x^{-1}\mathrm{sen}(y/x) - y^3x^{-2}\cos(y/x)\mathrm{sen}(y/x)}{\left(\mathrm{y}^2\cos(y/x)\right)^2}$$

$$= \frac{y^2\cos(y/x) - y^3x^{-1}\mathrm{sen}(y/x)}{\left(\mathrm{y}^2\cos(y/x)\right)^2} = \frac{\cos(y/x) - \mathrm{y}x^{-1}\mathrm{sen}(y/x)}{y^2 cos^2(y/x)}$$

Por lo cual se cumple el criterio de exactitud.

Así,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\mathrm{y}\cos\left(\frac{y}{x}\right)} - \int_{y_0}^{y} \frac{x_0 + \cos\left(\frac{y}{x_0}\right)}{\mathrm{y}\cos\left(\frac{y}{x_0}\right)} dy = c$$

es la solución de la ecuación exacta y podemos observar que las integrales obtenidas no pueden ser integradas analíticamente.

2. $\boldsymbol{y' = \frac{xy}{x+y+x^2}}, \qquad \boldsymbol{S = xy\partial_x + y^2\partial_y}.$

Para determinar que $S = xy\,\partial_x + y^2\,\partial_y$ es admitido por la ecuación diferencial, podemos verificar que se cumple la ecuación (4). Entonces escribimos la ecuación diferencial dada, en la forma (1):

$$xydx - (x + y + x^2)dy = 0, \tag{11}$$

de donde $\alpha = x + \mathrm{y} + x^2$ y $\beta = xy$, por lo cual el operador A tiene la forma:

$$A = (x + y + x^2)\,\partial_x + xy\,\partial_y.$$

Es fácil verificar que $[S, A] = 0$.

Ahora obtenemos el determinante del sistema (5)

$$\Delta = xy(xy) - (x + \mathrm{y} + x^2)y^2 = -xy^2 - y^3,$$

lo que nos permite calcular $\mu = 1/\Delta$, sustituyendo: $\mu = \frac{-1}{y^2(x+y)}$ es factor integrante.

Multiplicamos el factor integrante por la ecuación diferencial (11)

$$\frac{-x}{\mathrm{y}(x + y)}dx + \frac{(x + \mathrm{y} + x^2)}{y^2(x + y)}dy = 0$$

la ecuación anterior es exacta ya que

$$\left(\frac{-x}{y(x+y)}\right)_y = \frac{x^2+2xy}{y^2(x+y)^2}$$

y, por otro lado

$$\left(\frac{(x+y+x^2)}{y^2(x+y)}\right)_x = \frac{x^2+2xy}{y^2(x+y)^2},$$

por lo cual se cumple el criterio de exactitud.

Aplicando el método de ecuaciones exactas, se obtiene la solución:

$$\frac{x}{y}+\frac{1}{y}+\ln\left|\frac{y}{x+y}\right| = \tilde{c}.$$

$$\mathbf{3.}\ \boldsymbol{y' = \frac{y+xy^2+x^3}{x-x^2y-y^3}}, \qquad \boldsymbol{S = y\partial_x - x\partial_y}.$$

Para determinar que $S = y\,\partial_x - x\,\partial_y$ es admitido por la ecuación diferencial, podemos verificar que se cumple la ecuación (4). Entonces escribimos la ecuación diferencial dada, en la forma (1):

$$-(y+xy^2+x^3)dx+(x-x^2y-y^3)dy = 0, \tag{12}$$

el operador A tiene la forma:

$$A = (x-x^2y-y^3)\,\partial_x + (y+xy^2+x^3)\,\partial_y.$$

Se puede verificar que $[S, A] = 0$.

Ahora obtenemos el determinante del sistema (5)

$$\Delta = (x-x^2y-y^3)(-1)-(x-x^2y-y^3)(-x) = x^2+y^2,$$

lo que nos permite calcular $\mu = 1/\Delta$, sustituyendo: $\mu = \frac{1}{x^2+y^2}$ es factor integrante de (12).

Multiplicamos el factor integrante por la ecuación diferencial (12)

$$\frac{(-y-xy^2-x^3)dx}{x^2+y^2}+\frac{(x-x^2y-y^3)dy}{x^2+y^2} = 0$$

la ecuación anterior es exacta ya que:

$$\left(\frac{-y-xy^2-x^3}{x^2+y^2}\right)_y = y^2-x^2 = \left(\frac{x-x^2y-y^3}{x^2+y^2}\right)_x$$

por lo cual se cumple el criterio de exactitud.

Aplicando el método de ecuaciones exactas, se obtiene la solución:

$$x^2 + 2\arctan\frac{x}{y} + y^2 = \tilde{c}.$$

$$\mathbf{4.}\ \boldsymbol{y' = \frac{y}{1 + ye^{-x}}}, \qquad \boldsymbol{S = \partial_x + y\partial_y}.$$

Para determinar que $S = \partial_x + \mathrm{y}\,\partial_y$ es admitido por la ecuación diferencial, podemos verificar que se cumple la ecuación (4). Entonces escribimos la ecuación diferencial dada en la forma (1):

(13)
$$ydx - (1 + ye^{-x})dy = 0,$$

por lo cual el operador A tiene la forma:

$$A = (\,1 + ye^{-x})\,\partial_x + y\,\partial_y.$$

Ahora procedemos a calcular el conmutador $[S, A] = S(A) - A(S)$:

$$S(A) = (-ye^{-x})\,\partial_x + y(e^{-x})\,\partial_x + y\,\partial_y = y\,\partial_y,$$

$$A(S) = y\,\partial_y,$$

entonces:

$$[S, A] = y\,\partial_y - y\,\partial_y = 0$$

y así vemos que se cumple la ecuación (4) por lo tanto $S = \partial_x + y\,\partial_y$ es un operador admitido por $y' = \frac{y}{1+ye^{-x}}$.

Ahora obtenemos el determinante del sistema (5)

$$\Delta = y(1) - y(1 + ye^{-x}) = -y^2e^{-x}$$

lo que nos permite calcular $\mu = 1/\Delta$, sustituyendo: $\mu = \frac{-e^x}{y^2}$ es factor integrante.

Multiplicamos el factor integrante por la ecuación diferencial (13):

(14)
$$\frac{-e^x dx}{\mathrm{y}} + \frac{(e^x + y)dy}{y^2} = 0,$$

la ecuación anterior es exacta ya que:

$$\left(\frac{-e^x}{\mathrm{y}}\right)_y = \frac{e^x}{y^2} = \left(\frac{e^x+y}{y^2}\right)_x$$

Al resolver la ecuación exacta $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, buscamos una función $f(x,y) = c$ tal que $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x} = M(x,y)$ y $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} = N(x,y)$, entonces, aplicando estos hechos a la ecuación (14): $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x} = \frac{-e^x}{\mathrm{y}}$.

Integrando parcialmente respecto a "x": $f = \frac{-e^x}{\mathrm{y}} + g(y)$, ahora derivamos parcialmente ambos lados respecto a "y": $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y} = \frac{e^x}{y^2} + g'(y)$, pero $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y} = \frac{e^x+y}{y^2}$, entonces:

$$\frac{e^x + y}{y^2} = \frac{e^x}{y^2} + g'(y)$$

es decir $g'(y) = \frac{1}{y}$. Al integrar obtenemos $g(y) = \ln|y| + c$, por lo cual, la solución a la ecuación diferencial exacta es:

$$\frac{-e^x}{\mathrm{y}} + \ln|y| = \tilde{c}.$$

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Consideremos una ecuación diferencial de segundo orden en forma "física"

(15) $$\ddot{x} = f(t,x,\dot{x})$$

para una función desconocida $x = x(t)$. Introduciendo una nueva función $v := \dot{x}$ obtenemos el sistema $F := (F^1, F^2) = 0$

(16) $$F^1 := \dot{x} - v = 0, \qquad F^2 := \dot{v} - f(t,x,v) = 0,$$

o en su forma simétrica

(17) $$dt = \frac{dx}{v} = \frac{dv}{f}.$$

Como para las EDOs de primer orden, consideremos el operador $A := \partial_t + v\,\partial_x + f\,\partial_v$. La integral general de (16) está dada por el conjunto de las dos primeras integrales funcionalmente independientes $\omega^i = \omega^i(t,x,v) = c^i$ (constantes de movimiento), tales que

$$d\omega^i\big|_{F=0} = 0, \qquad |J^{xv}| := \left|\frac{\partial(\omega^1, \omega^2)}{\partial(x, v)}\right| \neq 0.$$

De (17) se sigue que $A(\omega^i) = 0$, es decir, las funciones ω^i son invariantes del operador A. Cualquier otra solución Ω de (16) es un invariante de A y es una función de ω^1, ω^2, entonces el Jacobiano

$$\left|\frac{\partial(\Omega, \omega^1, \omega^2)}{\partial(t, x, v)}\right| = 0,$$

es decir

$$|J^{xv}|\Omega_t - |J^{tv}|\Omega_x + |J^{tx}|\Omega_v = 0, \qquad |J^{tv}| := \left|\frac{\partial(\omega^1, \omega^2)}{\partial(t, v)}\right|,\ |J^{tx}| := \left|\frac{\partial(\omega^1, \omega^2)}{\partial(t, x)}\right|.$$

Comparando la relación anterior con $A(\Omega) = 0$, y denotando $M := |J^{xv}|$, tenemos

$$Mv = -|J^{tv}|, \qquad Mf = |J^{tx}|.$$

Tal función M es llamada multiplicador de Jacobi. Debido a la relación M con los Jacobianos, M es una solución de la ecuación

(18)
$$M_t + (Mv)_x + (Mf)_v = 0 \sim dt = \frac{dx}{v} = \frac{dv}{f} = -\frac{dM}{f_v}.$$

La forma de M depende de la selección de $\omega^{1,2}$. Si se tiene $\widetilde{\omega}^1$, $\widetilde{\omega}^2$ como primeras integrales independientes, entonces la función $\widetilde{M} = M\left|\frac{\partial(\widetilde{\omega}^1, \widetilde{\omega}^2)}{\partial(\omega^1, \omega^2)}\right|$ es un multiplicador de Jacobi y, en general, cualquier función de la forma $M\Omega$, es un multiplicador de Jacobi.

Cualquier simetría puntual de (16) tiene la forma

$$S = \xi(t, x, v)\,\partial_t + \eta^1(t, x, v)\,\partial_x + \eta^2(t, x, v)\,\partial_v$$

y representa la llamada simetría de contacto para la ecuación (15) si ξ o η^1 dependen de v (con dependencia no lineal de η^1 en v si $\xi_v = 0$). Aplicando la primera prolongación de S

$$\underset{1}{S} = S + \zeta^1\,\partial_{\dot{x}} + \zeta^2\,\partial_{\dot{v}},$$
$$\zeta^1 = D_t(\eta^1) - \dot{x}D_t(\xi), \quad \zeta^2 = D_t(\eta^2) - \dot{v}D_t(\xi),$$

(19)
$$D_t = \partial_t + \dot{x}\,\partial_x + \dot{v}\,\partial_v$$

al sistema $F = 0$

$$\underset{1}{S}(F^1)\Big|_{F=0} = 0, \quad \underset{1}{S}(F^2)\Big|_{F=0} = 0$$

se obtienen dos ecuaciones lineales para la determinación de ξ, η^1 y η^2:

(20)
$$\eta^2 = A(\eta^1) - vA(\xi), \quad S(f) = A(\eta^2) - fA(\xi),$$

teniendo en cuenta que $D_t|_{F=0} = \partial_t + v\,\partial_x + f\,\partial_v = A$.

Excluyendo la función λ de la relación del conmutador

$$[S, A] = \lambda(t, x, v)A,$$

obtendremos (20). Una vez más, existe una simetría trivial $S^0 = \delta(t, x, v)A$. Para simplificar, introducimos el operador

$$\hat{S} := S - \xi A =: \hat{\eta}^1\,\partial_x + \hat{\eta}^2\,\partial_v,$$

para el cual

(21)
$$\left[\hat{S}, A\right] = 0 \ \sim\ \hat{\eta}^2 = A(\hat{\eta}^1),\ \hat{S}(f) = A(\hat{\eta}^2), \quad \hat{\eta}^1 \not\equiv 0$$

Así, para determinar la función desconocida $\hat{\eta}^1$ existe una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden

(22)
$$\hat{S}(f) = A\big(A(\hat{\eta}^1)\big).$$

Como en el caso de las EDO de primer orden, existe un número infinito de simetrías puntuales $\hat{S}$ para el sistema (16) y en general, el problema para encontrarlas tiene la misma dificultad que para resolver el sistema dado. Por supuesto, si hacemos alguna suposición adicional sobre la forma de las simetrías o sobre la forma de $f(t, x, v)$, entonces el problema para determinar las simetrías admitidas se simplifica drásticamente. Por ejemplo, para encontrar todas las simetrías puntuales de la ecuación (15) debemos suponer $\hat{\eta}^1 = a(t, x)v + b(t, x)$, que permite separar la ecuación (22) con respecto a v. En el caso de las llamadas simetrías de Hojman [Cariñena, 2021], [Hojman, 1992] cuando $f_v = 0$, la ecuación (22) se simplifica a $A\big(A(\hat{\eta}^1)\big) - \hat{\eta}^1 f_x = 0$. La derivada de la ecuación anterior con respecto a v conduce a la expresión $A(\hat{\eta}^1_x + \hat{\eta}^2_v) = 0$, que arroja la primera integral $\operatorname{div} S := \hat{\eta}^1_x + \hat{\eta}^2_v = \text{ctte}$. El caso más simple $f = 0$ lleva a la solución general
$\hat{\eta}^1 = a(v, x - tv)t + b(v, x - tv)$.

Consideremos el caso general. Sea $\omega = \omega(t, x, v)$ un invariante no trivial del operador de la simetría $\hat{S}$, es decir

(23)
$$\hat{S}(\omega) = \hat{\eta}^1\omega_x + \hat{\eta}^2\omega_v = 0, \quad \omega \neq t,\ \omega \not\equiv ctte.,$$

entonces el invariante general de $\hat{S}$ tiene la forma $I = I(t, \omega)$. El operador A es una simetría de la ecuación anterior, porque $\left[A, \hat{S}\right] = 0$, por lo tanto $A(\omega) =: h(t, \omega)$. Si $h \equiv 0$, entonces

$\omega^1 = \omega$. Si $h \not\equiv 0$, por lo que teniendo en cuenta que $A(\omega) = d\omega/dt$, tenemos la ecuación de primer orden

(24)
$$\frac{d\omega}{dt} = h(t, \omega).$$

Si es posible determinar la integral general de la ecuación anterior, entonces se obtiene la primera integral $\omega^1 = \omega^1(t, \omega) = c^1$ de (16).

Notemos que $\hat{S}(\omega^1) = \omega^1_\omega \hat{S}(\omega) = 0$, es decir ω^1, obtenido de (24) es un invariante de la simetría $\hat{S}$. Además, $\omega^1_v \neq 0$ (si $\omega^1_v = 0$, entonces $\omega_v = 0$ y de (22) o $\omega_x = 0$ que arroja el invariante trivial, o $\hat{\eta}^1 = 0$ y así, de (21) $\hat{\eta}^2 = 0$), por lo tanto podemos relacionar v con una nueva variable $z = \omega^1(t, x, v) = c^1$. En las nuevas variables, el sistema (17) se transforma en una ecuación diferencial de primer orden

(25)
$$v(t, x, z)dt - dx = 0,$$

y el operador A en las nuevas variables, toma la forma $A = \partial_t + v(t, x, z)\,\partial_x$. Así. La simetría no trivial $\hat{S}$ permite reducir el orden del sistema (16). Notemos que para la ecuación (15) el procedimiento descrito se conoce como método de invariantes diferenciales porque el invariante ω depende de la derivada $v = \dot{x}$.

El factor integrante $\mu = \mu(t, x, z)$ de (25) satisfice la ecuación $\mu_t + \big(\mu v(t, x, z)\big)_x = 0$ similar a (18), por lo tanto μ es un multiplicador de Jacobi, llamado último multiplicador de Jacobi, porque permite determinar la última integral $\omega^2 = c^2$. Finalmente, el conocimiento de un invariante de la simetría $\hat{S}$ y el último multiplicador de Jacobi μ resuelve el sistema (16) en cuadraturas.

Por cierto, existe una relación simple entre un multiplicador de Jacobi y los coeficientes de dos simetrías no proporcionales $\hat{S}^1 := \hat{\eta}^{11}\,\partial_x + \hat{\eta}^{12}\,\partial_v$ y $\hat{S}^2 := \hat{\eta}^{21}\,\partial_x + \hat{\eta}^{22}\,\partial_v$ admitidas por el sistema (16).

Consideremos $\Delta = \hat{\eta}^{11}\hat{\eta}^{22} - \hat{\eta}^{12}\hat{\eta}^{21} \neq 0$. Después

$$\Delta M = \begin{vmatrix} \hat{\eta}^{11} & \hat{\eta}^{12} \\ \hat{\eta}^{21} & \hat{\eta}^{22} \end{vmatrix} |J^{xv}| = \left| \begin{pmatrix} \hat{\eta}^{11} & \hat{\eta}^{12} \\ \hat{\eta}^{21} & \hat{\eta}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1_x & \omega^2_x \\ \omega^1_v & \omega^2_v \end{pmatrix} \right| =$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{S}^1(\omega^1) & \hat{S}^1(\omega^2) \\ \hat{S}^2(\omega^1) & \hat{S}^2(\omega^2) \end{vmatrix} = \hat{S}^1(\omega^1)\hat{S}^2(\omega^2) - \hat{S}^1(\omega^2)\hat{S}^2(\omega^1).$$

Cualquier simetría admitida, transforma una solución del sistema en una solución del mismo sistema, es decir $\hat{S}^i\big(\omega^j\big) = h^{ij}(\omega^1, \omega^2)$, así obtenemos

$$\Delta M = H(\omega^1, \omega^2), \qquad A(H) = 0.$$

Por lo tanto, debido a la propiedad de que $M\Omega$ es un multiplicador de Jacobi si $A(\Omega) = 0$, la función Δ^{-1} es un multiplicador de Jacobi.

En las variables t, x, z para la ecuación reducida (25), las simetrías $\hat{S}^1, \hat{S}^2$ toman la forma

$$\hat{Z}^1 := \hat{S}^1(x)\,\partial_x, \quad \hat{Z}^2 := \hat{S}^2(x)\,\partial_x + \hat{S}^2(z)\,\partial_z,$$

y el factor de integración (último multiplicador de Jacobi) se ve como

$$\mu^{-1}(t,x,z) = \begin{vmatrix} \hat{S}^1(x) & 0 \\ \hat{S}^2(x) & \hat{S}^2(z) \end{vmatrix} = \hat{S}^1(x)\hat{S}^2(z) =: \Delta^z, \quad \Delta^z = \omega_v^1 \Delta.$$

Sean $\hat{S}^1$ y $\hat{S}^2$ dos simetrías no proporcionales del sistema (16). Entonces el conmutador [Bianchi, 1918] tiene la forma $[\hat{S}^1, \hat{S}^2] = \Omega^1\hat{S}^1 + \Omega^2\hat{S}^2$, donde $A(\Omega^i) = 0$. Si las simetrías no conmutan, entonces, teniendo en cuenta que $\hat{S}^i(\Omega^j) = \Omega^{ij}$ con $A(\Omega^{ij}) = 0$, es posible determinar $\tilde{S}^i = a^i(\Omega^1, \Omega^2)\hat{S}^1 + b^i(\Omega^1, \Omega^2)\hat{S}^2$, tal que $[\tilde{S}^1, \tilde{S}^2] = \tilde{S}^1$.

Si se comienza a reducir el orden del sistema (16) usando la simetría $\hat{S}^1$, es decir, seleccionando su invariante $\hat{S}^1(\omega) = 0$, entonces en las variables t, x, ω, el operador A toma la forma

$$A^\omega := \partial_t + v(t,x,\omega)\,\partial_x + h(t,\omega)\,\partial_\omega,$$

el sistema dado se reduce a lo siguiente

$$dt = \frac{dx}{v(t,x,\omega)} = \frac{d\omega}{h(t,\omega)},$$

y la ecuación (24) es parte de las relaciones anteriores. La segunda simetría $\hat{S}^2$ se transforma en $\hat{S}^{2\omega} := \hat{S}^2(x)\,\partial_x + \hat{S}^2(\omega)\,\partial_\omega$ y obviamente conmuta con A^ω. Además $\hat{S}^2(\omega) \neq 0$ (en caso contrario $\Delta = 0$). Considerando el operador $\hat{S}^{2\omega} - \hat{\eta}^{21}/vA^\omega$ y aplicando todos los hechos de la sección 1 para EDO $h(t,\omega)dt - d\omega = 0$ obtenemos su factor integrante $\mu^\omega := -1/\hat{S}^2(\omega)$.

Si las simetrías $\hat{S}^i$ conmutan, $[\hat{S}^1, \hat{S}^2] = 0$, entonces $\hat{S}^2$ es la simetría de la ecuación $\hat{S}^1(\omega) = 0$, por lo que $\hat{S}^2(\omega) = h^2(t,\omega)$. En el caso de que $[\hat{S}^1, \hat{S}^2] = \hat{S}^1$ tenemos $[\hat{S}^1, \hat{S}^2](\omega) = \hat{S}^1\left(\hat{S}^2(\omega)\right) = 0$, es decir, la función $\hat{S}^2(\omega)$ es un invariante del operador $\hat{S}^1$, por lo tanto, nuevamente $\hat{S}^2(\omega) = h^2(t,\omega)$. En cualquier caso μ^ω no depende de x explícitamente. Por lo tanto, la primera integral también: $\omega^1 = \omega^1(t,\omega) = z$. En las variables $t, x, v(t,x,z)$ la simetría $\hat{S}^1$ toma la forma $\hat{S}^1(x)\,\partial_x$ y produce el factor integrante $\mu^x := 1/\hat{S}^1(x) = 1/\hat{\eta}^{11}$ para la ecuación $v(t,x,z)dt - dx = 0$. Finalmente, reuniendo todos los factores integrantes, tenemos las siguientes relaciones entre ellos:

(26)
$$\Delta^{-1} = -\omega_v \mu^x \mu^\omega, \qquad \mu = -\mu^x \mu^\omega / \omega_\omega^1.$$

Estas relaciones permiten escribir la ecuación (24) como 1-forma diferencial [González-López, 1988]

$$d\omega^1 = \Delta^{-1}\begin{vmatrix} dt & dx & dv \\ 1 & v & f \\ 0 & \eta^1 & \eta^2 \end{vmatrix} = \Delta^{-1}\omega^1_\omega(-A(\omega)dt + d\omega) = 0.$$

Teniendo en cuenta (26), la ecuación anterior es equivalente a $\mu^\omega(h(t,\omega)dt - d\omega) = 0$ y por lo tanto es integrable.

Otra relación interesante entre el multiplicador M de Jacobi y la simetría $\hat{S}$ fue indicada por Bianchi [Bianchi, 1908, par. 152]:

$$A\big(\hat{S}(\ln M) + \operatorname{div}\hat{S}\big) = 0.$$

En el caso de divergencia nula de $\hat{S}$ se obtiene $\hat{S}(\ln M) = \Omega(\omega^1, \omega^2)$. Usando la propiedad de una simetría para transformar cualquier solución de un sistema dado en una solución del mismo sistema, es decir $\hat{S}\big(H(\omega^1,\omega^2)\big) = \Omega(\omega^1,\omega^2)$ concluimos que $A(M) = 0$.

Como ejemplo, consideremos $A = \partial_t + v\,\partial_x + 2t^{-2}x\,\partial_v$ con dos simetrías $\hat{S}^1 = x\,\partial_x + v\,\partial_v$, $\hat{S}^2 = -tv\,\partial_x - (v + 2x/t)\,\partial_v$. Es fácil ver que $\omega = v/x$ es un invariante de $\hat{S}^1$ y $\hat{S}^2(\omega) = (t\omega+1)(t\omega-2)/t$. Por lo tanto $\mu^\omega = -t(t\omega+1)^{-1}(t\omega-2)^{-1}$ es un factor integrante de la ecuación (24) para $h(t,\omega) = 2/t^2 - \omega^2$. La integración arroja la primera integral $\omega^1 = t^3(t\omega-2)/(t\omega+1)$. Para la ecuación (25) con $v(t,x,z) = \frac{x}{t}\frac{2t^3+z}{t^3-z}$ el factor de integración es $\mu^x = 1/\hat{S}^1(x) = 1/x$. Notemos que $\Delta = (tv+x)(tv-2x)/t$ y el último multiplicador de Jacobi $\mu = 1/\Delta^z = (3xz)^{-1}$ es el factor integrante de la ecuación (25).

Si se conoce una simetría $\hat{S}^1$ y Δ, entonces para determinar la segunda simetría admitida $\hat{S}^2$ tenemos tres ecuaciones:

(27)
$$\hat{\eta}^{22} = A(\hat{\eta}^{21}), \quad \Delta = \hat{\eta}^{11}\hat{\eta}^{22} - \hat{\eta}^{12}\hat{\eta}^{21}$$

(28)
$$\hat{S}^2(f) = A(\hat{\eta}^{22}),$$

pero es fácil verificar que la ecuación (28) se mantiene si (27) es válida. Por lo tanto, de (27) obtenemos una ecuación de primer orden para determinar $\hat{\eta}^{21}$ en lugar de una ecuación de segundo orden (22)

$$A\left(\frac{\hat{\eta}^{21}}{\hat{\eta}^{11}}\right) = \frac{\Delta}{(\hat{\eta}^{11})^2}.$$

Multiplicador de Jacobi y Teorema de Noether

Si se conoce el Lagrangiano $L = L(t,x,v)$, entonces la ecuación (15) es la ecuación de Euler-Lagrange

$$L_x - D_t(L_v) = 0,$$

donde el operador D_t es el operador (19). Para el sistema (17), la ecuación

$$E(L) = 0, \qquad E := \partial_x - A \circ \partial_v$$

en el caso cuando $L_{vv} \neq 0$ da la expresión $f(t, x, v)$ en términos del Lagrangiano

$$f(t, x, v) = \frac{L_x - L_{tv} - vL_{xv}}{L_{vv}}.$$

La derivación de la expresión anterior con respecto a v conduce a la ecuación (18) [Whittaker, 1917, par. 123] con $M = L_{vv}$. Es decir, en el caso de un multiplicador de Jacobi distinto de cero, se puede obtener un Lagrangiano

$$L^M := \iint M dv dv + Q(t, x)v + R(t, x),$$

con

$$Q_t - R_x = \iint M_x dv dv - A\left(\int M dv\right),$$

donde el lado derecho de la relación anterior no depende de v debido a (18).

Para dos simetrías no proporcionales $\hat{S}^{1,2}$ el multiplicador de Jacobi $M = \Delta^{-1} \neq 0$, por lo tanto se puede obtener el Lagrangiano L^M al menos en cuadraturas. La condición menos fuerte para que una simetría puntual $\hat{S}^1$ sea una simetría variacional, es decir, $\hat{S}^1(L^M) = A(B^1)$ para alguna función $B^1(t, x, v)$ da la relación

$$\hat{\eta}^{11} L_x^M + \hat{\eta}^{12} L_v^M = A(B^1) \sim A(\hat{\eta}^{11} L_v^M - B^1) = 0.$$

Es decir, obtenemos la primera integral

(29)
$$\Omega(\omega^1, \omega^2) = \hat{\eta}^{11}\left(\int M dv + Q(t, x)\right) - B^1(t, x, v) = c^1.$$

Este es el sentido del teorema de Noether, que relaciona una simetría variacional con una constante de movimiento. Viceversa de (29) se sigue que para una simetría $\hat{S}^1$ existe una función Ω tal que $\hat{S}^1(L^M) = A(B^1)$. Por lo tanto, el uso del Lagrangiano L^M y el teorema de Noether es solo otra interpretación del hecho de que el conocimiento de dos simetrías no proporcionales $\hat{S}^{1,2}$ permite resolver el sistema(16) en cuadraturas.

EJERCICIO: Calcular las simetrías puntuales de la ecuación de segundo orden

$$\ddot{x} + 2\frac{\dot{x} + \dot{x}^2}{t - x} = 0.$$

Integrar la ecuación dada usando dos simetrías calculadas.