Matrices y operaciones con matrices

En 1855, el matemático inglés Arthur Cayley (1821-1895) introdujo el siguiente concepto formal de matriz:

Definición

Una matriz de tamaño $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números reales ordenados en m renglones y n columnas.

$$\begin{array}{ll}
\begin{array}{r} \textbf{Renglón 1} \quad \rightarrow \\ \textbf{Renglón 2} \quad \rightarrow \\ \vdots \qquad\quad \\ \textbf{Renglón m} \quad \rightarrow \end{array} &
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\
 & \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \textbf{Col 1} & \textbf{Col 2} & \cdots & \textbf{Col n} \end{array}
\end{array}$$

Para simplificar la notación escribimos $A = [a_{ij}]$.

¿Cuándo dos matrices son iguales?

Dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son iguales si tienen el mismo tamaño y si $a_{ij} = b_{ij}$.

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Algunos tipos de matrices...
Matrices cuadradas de tamaño n

Si $m = n$, decimos que es una matriz cuadrada de tamaño n.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Algunos tipos de matrices...
Matrices cuadradas de tamaño n

Si $m = n$, decimos que es una matriz cuadrada de tamaño n.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$1) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0{,}9 \\ 5 & 0 & 8 \\ -2 & 0{,}4 & 2 \end{bmatrix} \quad 2) \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} \quad 3) \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

Algunos tipos de matrices...
vector columna y vector renglón

Un **vector columna** es una matriz de tamaño $n \times 1$:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \qquad \text{Ejemplo: } \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Un **vector renglón** es una matriz de tamaño $1 \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_1, a_2, \dots, a_n \end{bmatrix}, \qquad \text{Ejemplo: } \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Operaciones con matrices

Motivación

Suma de números reales:

$$a + b$$

Motivación

Suma de números reales:

$$a + b$$

¿Cómo sumamos dos matrices

$$A + B?$$

Motivación

Suma de números reales:

$$a + b$$

¿Cómo sumamos dos matrices

$$A + B?$$

Producto de números reales:

$$ab$$

Motivación

Suma de números reales:

$$a + b$$

Producto de números reales:

$$ab$$

¿Cómo sumamos dos matrices

$$A + B?$$

¿Cómo realizamos el producto de dos matrices

$$AB?$$

Motivación

Suma de números reales:

$$a + b$$

Producto de números reales:

$$ab$$

Inversos de números reales:
$a \neq 0$

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

¿Cómo sumamos dos matrices

$$A + B?$$

¿Cómo realizamos el producto de dos matrices

$$AB?$$

Motivación

Suma de números reales:

$$a + b$$

¿Cómo sumamos dos matrices

$$A + B?$$

Producto de números reales:

$$ab$$

¿Cómo realizamos el producto de dos matrices

$$AB?$$

Inversos de números reales: $a \neq 0$

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

¿Cómo definimos el inverso de una matriz

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1?$$

Suma de matrices

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ dos matrices de tamaño $m \times n$, la suma de A y B se define como

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

donde

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Suma de matrices

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ dos matrices de tamaño $m \times n$, la suma de A y B se define como

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

donde

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$c_{m2} = a_{m2} + b_{m2}$$

Suma de matrices

$$\begin{bmatrix} \boxed{3} & 7 \\ 4 & 9 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boxed{5} & 2 \\ 7 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{3+5} & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{8} & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

Suma de matrices

$$\begin{bmatrix} 3 & \boxed{7} \\ 4 & 9 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & \boxed{2} \\ 7 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5 & \boxed{7+2} \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & \boxed{9} \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

Suma de matrices

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \\ 2 & \boxed{0} \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \\ 1 & \boxed{4} \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5 & 7+2 \\ * & * \\ * & \boxed{0+4} \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ * & * \\ * & \boxed{4} \\ * & * \end{bmatrix}$$

Suma de matrices

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5 & 7+2 \\ 4+7 & 9+1 \\ 2+1 & 0+4 \\ 5+0 & 1+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 11 & 10 \\ 3 & 4 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Notemos que....

La suma de matrices sólo está definida entre matrices del mismo tamaño.

$$\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}} + \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}} = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}}$$

Conmutatividad de la suma

$$A + B = B + A.$$

Asociatividad de la suma

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Suma de matrices

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5 & 7+2 \\ 4+7 & 9+1 \\ 2+1 & 0+4 \\ 5+0 & 1+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 11 & 10 \\ 3 & 4 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+3 & 2+7 \\ 7+4 & 1+9 \\ 1+2 & 4+0 \\ 0+5 & 9+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 11 & 10 \\ 3 & 4 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Producto punto de dos vectores

$$\left[\ a_1, a_2, \ldots, a_n\ \right] \bullet \left[\ b_1, b_2, \ldots, b_n\ \right] = a_1 b_1 + a_2 b_2 \cdots a_n + b_n$$

$$\left[\ a_1, a_2, \ldots, a_n\ \right] \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \cdots a_n + b_n$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \cdots a_n + b_n$$

Producto de Matrices

Sean $A = [a_{ij}]$ una matriz de $m \times n$ y $B = [b_{ij}]$ una matriz de $n \times p$. Entonces el producto AB se define como una matriz C de $m \times p$, de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} c_{ij} &= (\text{renglón i}) \bullet (\text{columna j}) \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{in}b_{nj} \end{aligned}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots a_{2n}b_{n1}$$

Producto de matrices

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{4} & 3 & 6 \\ \boxed{1} & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{2\times 4+3\times 1} & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boxed{11} & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Producto de matrices

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & \boxed{3} & 6 \\ 1 & \boxed{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 4 + 3 \times 1 & \boxed{2 \times 3 + 3 \times 2} & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & \boxed{12} & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Producto de matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \boxed{1} & \boxed{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & \boxed{3} & 6 \\ 1 & \boxed{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 4 + 3 \times 1 & 2 \times 3 + 3 \times 2 & * \\ * & \boxed{1 \times 3 + 5 \times 2} & * \end{bmatrix}$$

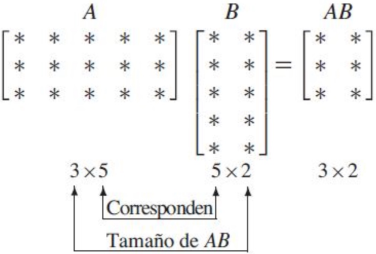
$$= \begin{bmatrix} 11 & 12 & * \\ * & \boxed{13} & * \end{bmatrix}$$

Producto de matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 4 + 3 \times 1 & 2 \times 3 + 3 \times 2 & * \\ * & 1 \times 3 + 5 \times 2 & * \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 12 & 21 \\ 9 & 13 & 21 \end{bmatrix}$$

Notemos que...



Propiedades del producto

No conmutatividad del producto

$$AB \neq BA$$

Asociatividad del producto

Distributividad

Distributividad por la izquierda

$$C(A+B) = CA + CB$$

Distributividad por la derecha

$$(A+B)C = AC + BC$$

Multiplicación de una matriz por un escalar

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos el producto de una matriz por un escalar como

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Propiedad del producto por escalar

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

$$1A = A$$

Matriz cero de orden $m \times n$

Es una matriz de tamaño $m \times n$, cuyas entradas son todas cero.

$$\mathbf{0}_{m\times n} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz cero de orden $m \times n$

Es una matriz de tamaño $m \times n$, cuyas entradas son todas cero.

$$\mathbf{0}_{m\times n} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

1) $\mathbf{0}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 2) $\mathbf{0}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 3) $\mathbf{0}_{1\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

Propiedad de $\mathbf{0}_{m\times n}$

Sea A una matriz de tamaño $n \times m$. Entonces

$$A + \mathbf{0}_{m\times n} = A.$$

Matriz identidad de orden n

Es una matriz de tamaño $n \times n$ de la forma

$$\boldsymbol{I}_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad de orden n

Es una matriz de tamaño $n \times n$ de la forma

$$\boldsymbol{I}_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

1) $\boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2) $\boldsymbol{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 3) $\boldsymbol{I}_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

Propiedad de $\boldsymbol{I}_n$

Sea A una matriz de tamaño $n \times m$. Entonces

$$AI_m = A = I_nA.$$