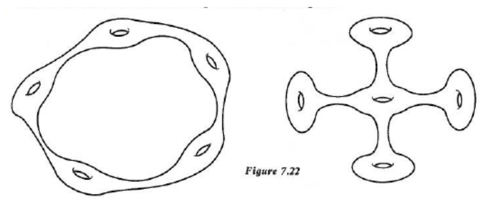
Mini-curso Topología de Superficies

Triangulaciones e invariantes

1. ¿Son las superficies figura homeomorfas? Justifica tu respuesta



2. Triangula las siguientes superficies y calcula su característica de Euler:

   a) el cilindro

   b) la botella de Klein

   c) el plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$

   d) la superficie $\underbrace{T^2\#T^2\#\cdots\#T^2}_{g \text{ veces}}$ orientable estándar de género g

   e) la superficie $\underbrace{\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2\#\cdots\#\mathbb{R}P^2}_{g \text{ veces}}$ no orientable estándar de género g.

3. ¿Cuál es el mínimo número de triángulos necesario para triangular una esfera?

4. Dada cualquier triangulación del disco cerrado $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, demuestra que

   $$\chi := \#\text{Vértices - }\#\text{Lados + }\#\text{Triángulos} \qquad\qquad \text{es siempre 1}$$

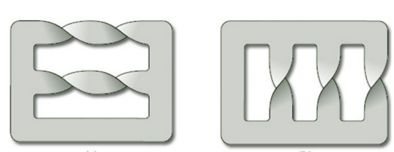
   Sugerencia: Pruebe primero que esto es cierto para un sólo triángulo y proceda por inducción en el número de triángulos. ¿Qué le pasa a la suma alternada χ cuando borras un triángulo?

5. Use el resultado anterior para probar que para toda triangulación de la esfera S^2 se tiene que $\chi = 2$.

6. Los antiguos griegos sabían que hay sólo cinco poliedros regulares: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Pruebe este hecho considerando subdivisiones de la espera en n-gonos (con n fija) tal que exactamente m lados se encuentran en cada vértice ($m, n \geq 3$).

   Sugerencia: Característica de Euler.

7. Determina si las superficies (a) y (b) ilustradas son o no orientables. Justifica tu respuesta.



8. Demuestra que la botella de Klein es no-orientable y la esfera es orientable.

9. Demuestra que la suma conexa de una superficie no-orientable con cualquier superficie es una superficie no-orientable.

Clasificación de superficies

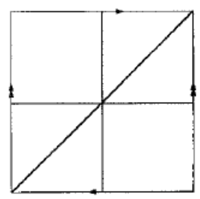
1. Sean A y B espacios homeomorfos al disco cerrado $\mathbb{D}^2$ tales que se intersecan en sus fronteras a lo largo de arcos. Demuestra que $A \cup B$ es homemorfo a $\mathbb{D}^2$.

   Sugerencia: Puedes asumir que cualquier homeomorfismo de la frontera del disco $\mathbb{D}^2$ en sí mismo puede extenderse a un homeomorfismo del disco $\mathbb{D}^2$ entero (¿por qué?)

2. Considere una triangulación de una superficie compacta Σ y considere la gráfica G de vértices y aristas de la triangulación. Sea T subgráfica de G que es un árbol. Prueba que T tiene una vecindad o "ensachamiento" que es homeomorfa a $\mathbb{D}^2$.

   Sugerencia: Hazlo por inducción en el número de vértices del árbol y usa el ejercicio anterior.

3. Las lineas rectas que se muestran en la figura representan tres curvas cerradas simples en la botella de Klein. "Ensancha" cada curva y decide si el resultado es un cilindro o una banda de Möbius. Describe el efecto de hacer cirugía a lo largo de la curva.

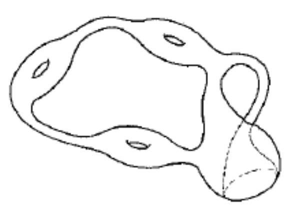
   

4. Considere una triangulación de una superficie compacta Σ y considere la gráfica G de vértices y aristas de la triangulación. Sea T un árbol maximal en G y Γ la gráfica dual a T. Demuestre que Γ es una gráfica conexa.

5. Prueba el caso (b) de la demostración del teorema de clasificación de superficies que vimos en clase.

   Sea Σ una superficie compacta y sin frontera con $\chi(\Sigma) < 2$ y sea γ una curva cerrada simple en Σ que no separa a Σ (es decir $\Sigma - \gamma$ es conexo). Supongamos que el ensanchamiento $N(\gamma)$ de la curva γ es homeomorfo a una banda de Möbius. Prueba que Σ es homeomorfa a $\hat{\Sigma}_\gamma \# \mathbb{R}P^2$, donde $\hat{\Sigma}_\gamma$ es la superficie que resulta de tomar $\Sigma - int(N(\gamma))$ y "tapar" la(s) componente(s) frontera con disco(s).

6. Demuestra que la superficie ilustrada en la figura es homemorfa a una de las superfices estándares usando el procedimiento de la prueba del Teorema de Clasificación de Superficies.

7. Sean γ_1 y γ_2 dos curvas cerradas simples en la superficie orientable Σ_g con $N(\gamma_1)$ y $N(\gamma_2)$ "ensanchamientos" de éstas. Suponga que las superficies $\Sigma_g - int(N(\gamma_1))$ y $\Sigma_g - int(N(\gamma_2))$ son conexas. Prueba que existe un homeomorfismo $f : \Sigma_g \to \Sigma_g$ tal que $f(\gamma_1) = \gamma_2$.

   Sugerencia: ¿Qué superfice resulta de cortar Σ_g a lo largo de γ_i?

   Utiliza el Teorema de clasificación de superficies compactas con frontera.