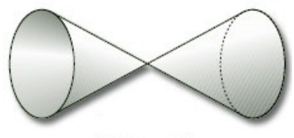
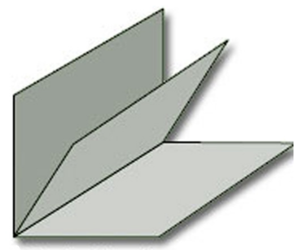
Mini-curso Topología de Superficies

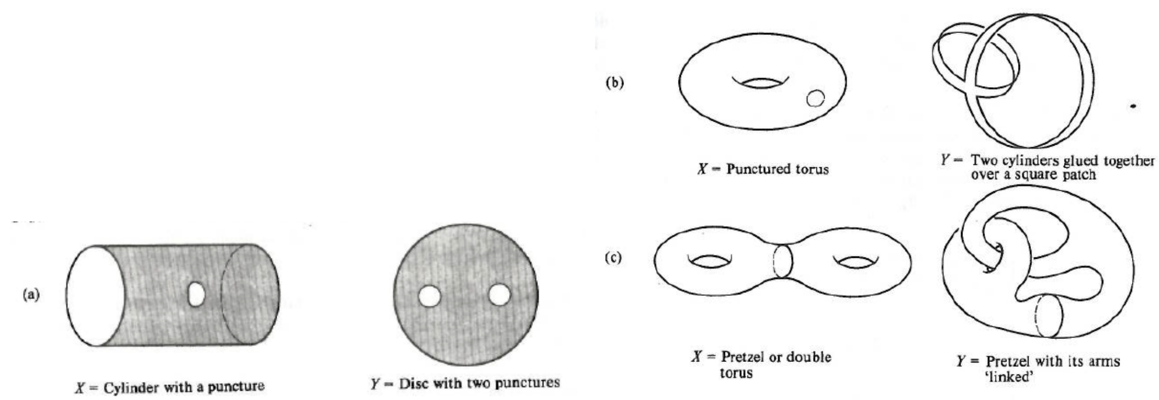
Superficies: definiciones y ejemplos

1. Determina si el *doble cono* y el *libro de tres hojas* son o no son superficies. Justifica tu respuesta.

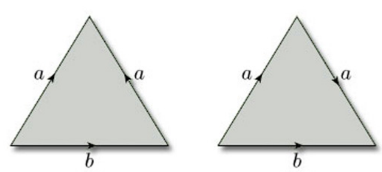




2. Considere las superficies ilustradas en la siguiente figura y suponga que son elásticas. Para cada par de espacios X y Y convéncete de que X puede ser continuamente deformado en Y.



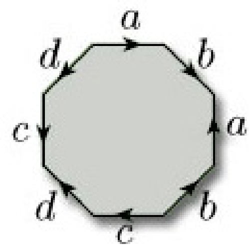
3. ¿Qué superficies se obtienen identificando los lados (en las direcciones dadas) en cada unos de los siguientes triángulos?



(a) (b)

4. Sea X el espacio que consiste de la esfera S^2 más un punto extra p. Las vecindades abiertas de los puntos de S^2 son las usuales, y las del punto p son conjuntos de la forma $[U \setminus \{(0,0,1)\}] \cup \{p\}$, donde U es una vecindad abierta de $(0,0,1)$ en S^2. Demuestre que X con esa topología no es Hausdorff, pero es localmente homeomorfo al plano. *¿Crees que sería razonable llamar superficie a X?*

5. Describe qué superficie se obtienen identificando los lados (en las direcciones dadas) del siguiente octágono.



¿Puedes generalizar esta construcción para obtener otras superficies como $T^2\#T^2\#T^2$ y $\underbrace{T^2\#T^2\#\cdots\#T^2}_{g \text{ veces}}$?

6. *El toro* T^2. Hay cuatro definiciones comunes del toro T^2:

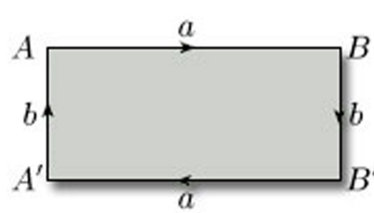
   a) como $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, es decir, el plano módulo la relación de equivalencia $(x, y) \sim (u, w)$ si y sólo si $x - u$ y $y - w$ son ambos enteros.
   b) como el cuadrado con lados opuestos identificados
   c) como el producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$
   d) como la superficie de revolución obtenida de rotar un círculo alrededor de un eje en su plano y disjunto de éste.

   Prueba que a)-d) definene espacios topológicos homeomorfos.

7. Demuestra que la suma conexa de dos toros es homemorfa a la esfera con dos asas.

8. *Plano proyectivo real* $\mathbb{R}P^2$. Considera los siguientes tres espacios topológicos:

   a) El conjunto de lineas a través del origen en el espacio Euclidiano 3-dimensional. Es decir, el espacio cociente
   $$S^2/(v \sim -v).$$
   b) La superficie que resulta de identificar los lados del rectángulo como lo indica la figura.

   c) El espacio de adjunción de un disco cerrado y una banda de Möbius “pegadas” por la frontera.

   Demuestra que los tres espacios son superficies homeomorfas.

9. Demuestra que la suma conexa de dos plano proyectivos es homeomorfa a la botella de Klein.

10. ¿Qué es la suma conexa de un toro con un plano proyectivo?