ESCUELA DE MATEMTICAS DE AMRICA LATINA Y EL CARIBE EMALCA-MÉXICO 2017

Topología de superficies

Rita Jiménez Rolland

Instituto de Matemáticas, UNAM–Oaxaca

5-8 de diciembre de 2017

Guadalajara, Jalisco

Temario

- Espacios topológicos
- Clasificación de Letras
- Clasificación de 1-variedades
- Superficies: definiciones y ejemplos
- Construcción de superficies: pegados y sumas conexas
- El Teorema de Clasificación de Superficies Compactas
- Triangulaciones y característica de Euler
- Gráficas y característica de Euler
- Superficies y característica de Euler
- La prueba de Zeeman
- Orientabilidad
- Otros teoremas de clasificación de superficies
- Homeomorfismos y el grupo modular de superficies

Clasificación en matemáticas

¿Qué clasificar? Definir los objetos a clasificar

¿Bajo qué criterio? Definir una relación de equivalencia entre objetos

¿Qué quiere decir clasificar?

- Dados dos objetos, determinar si están o no relacionados
- Dar una lista completa de representantes de las clases de equivalencia
- Dar un conjunto de *invariantes* que caractericen completamente una clase de equivalencia dada

Clasificando espacios métricos

¿Qué clasificar? Espacios métricos (X, d_X)
X es un conjunto con una métrica $d_X : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

¿Bajo qué criterio?

- Isometría
  Dos espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y) son *isométricos* si existe una función $\phi : X \to Y$ biyectiva, tal que

$$d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) = d_X(x_1, x_2) \text{ para todo } \quad x_1, x_2 \in X.$$

- Homeomorfismo
  Dos espacios métricos (X, d_X),(Y, d_Y) son *homeomorfos* si existe una función $\phi : X \to Y$ biyectiva, continua con inversa continua.
  Homeomorfismo = biyección de puntos y abiertos

Clasificando espacios topológicos

¿Qué clasificar? Espacios topológicos (X, τ_X)
espacio de Hausdorff / segundo numerable / conexo / compacto

¿Bajo qué criterio? Homeomorfismo

Dos espacios topológicos X y Y son *homeomorfos* si existe una función $\phi : X \to Y$ biyectiva, continua con inversa continua.

Homeomorfismo = biyección de puntos y abiertos

Clasificando letras

¿Qué clasificar? Letras mayúsculas en fuente Sans Serif $\TeX$

A B C D E F G H I J K L M N Ñ O P Q R S T U V W X Y Z

como subespacios del plano $\mathbb{R}^2$

¿Bajo qué criterio? Homeomorfismo

Dos letras $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ son equivalentes $L_1 \cong L_2$(*homeomorfas*) si existe $\phi : L_1 \to L_2$ biyectiva, continua con inversa continua.

Detalles en: Rafael López, *¿Cómo un topológo clasifica las letras del alfabeto?* MISCELÁNEA MATEMÁTICA **61** (2015) 57–73.

Encontrando homeomorfismos explícitos

Si creemos que dos letras son homeomorfas: *definir a cada letra como un subconjunto concreto de* $\mathbb{R}^2$ *y dar un homeomorfismo explícito.*

Ejemplo:

$$\mathsf{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \leq 0\}, \quad \mathsf{I} = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

Homeomorfismo

$$\pi : \mathsf{C} \to \mathsf{I}, \quad \pi(x,y) = (0,y)$$

con inversa

$$\pi^{-1}(0,y) = (-\sqrt{1-y^2}, y).$$

Encontrando homeomorfismos explícitos

Si creemos que dos letras son homeomorfas: *definir a cada letra como un subconjunto concreto de $\mathbb{R}^2$ y dar un homeomorfismo explícito.*

Ejemplo:

$$\mathsf{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \leq 0\}, \quad \mathsf{I} = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

Homeomorfismo

$$\pi : \mathsf{C} \to \mathsf{I}, \quad \pi(x,y) = (0,y)$$

con inversa

$$\pi^{-1}(0,y) = (-\sqrt{1-y^2}, y).$$

Obtenemos seis grupos de letras donde todas las letras de cada uno de ellos son homeomorfas entre sí.

A R

C G I J L M N S U V W Z

D O

E F T Y

H K

Ñ

Obs. Dos letras de diferentes grupos puedan ser homeomorfas.

¿Pertenecen la letra I y la letra Y al mismo grupo?

Letras NO homeomorfas: invariantes topológicos

invariante topológico: Propiedad del espacio que se preserva bajo homeomorfismo

$L_1 \not\approx L_2$ si existe un invariante topológico que satisfaga L_1 pero NO L_2

Ejemplos de invariantes:

- La *conexidad* es una invariante topológico:

  Todas las letras son conexas salvo Ñ

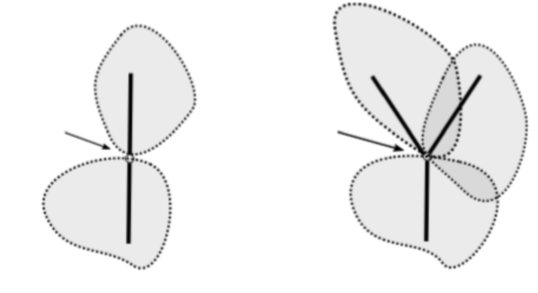
- El *número de componentes conexas* de un espacio topológico.
- Sea $L \subset \mathbb{R}^2$ y $p \in L$. Decimos que p es un *punto de intersección de orden* $O(p) = n \in \mathbb{N}$ si el espacio $L \setminus \{p\}$ tiene exactamente n componentes conexas.
  Si $\phi : L_1 \to L_2$ es homemorfismo y $p \in L_1$, ent. $O(\phi(p)) = O(p)$.

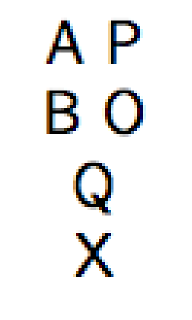
Invariantes topológicos: componentes conexas

Para $n \in \mathbb{N}$ tenemos invariantes

$$N(n, L) = card\{p \in L : O(p) = n\}$$

$N(n, L) = 0$ para casi todo n y $N(n, L) = \infty$ para ciertos n. El resto de los casos permite distinguir letras en distintas clases





¿?

$$N(n, \mathsf{I}) = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ \infty & n = 2 \\ 0 & n \neq 1, 2 \end{cases} \quad , \quad N(n, \mathsf{Y}) = \begin{cases} 3 & n = 1 \\ \infty & n = 2 \\ 1 & n = 3 \\ 0 & n \neq 1, 2, 3. \end{cases}$$

Teorema de clasificación de letras

La clasificación de las letras mayúsculas en la fuente Sans Serif TEX, hasta por homeomorfismo, es la siguiente:

A R
B
C I J L M N S U V W Z
D O
E F G T Y
H K
Ñ
P
Q
X

Clasificando 1-variedades conexas

¿Qué clasificar? 1-variedades conexas (todas / sin frontera)

Una 1*-variedad* M es un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable tal que M puede ser cubierto por conjuntos abiertos homeomorfos a $\mathbb{R}$ o a $(0, 1]$. Si sólo se tienen abiertos homeomorfos a $\mathbb{R}$ decimos que M es una 1*-variedad sin frontera*.

¿Bajo qué criterio? Homeomorfismo

Ejemplos de 1-variedades:

1. La recta real $\mathbb{R}$
2. El círculo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
3. El borde de $[0, 1] \times [0, 1]$
4. $\mathbb{R}_{\geq 0}$
5. El intervalo abierto $(0, 1)$
6. El intervalo semi-abierto $(0, 1]$

Clasificando 1-variedades conexas

Teorema de clasificación de 1-variedades conexas

Existen, hasta por homeomorfismo, exactamente cuatro 1-variedades conexas:

(a) el círculo S^1

(b) la recta real $\mathbb{R}$

(c) el intervalo cerrado

(d) el intervalo semi-abierto

Clasificando 1-variedades conexas

Teorema de clasificación de 1-variedades conexas

Existen, hasta por homeomorfismo, exactamente cuatro 1-variedades conexas:

(a) el círculo S^1

(b) la recta real $\mathbb{R}$

(c) el intervalo cerrado

(d) el intervalo semi-abierto

<<PROPIEDADES LOCALES DETERMINAN LA FORMA GLOBAL DEL ESPACIO>>

Invariantes clave:

con frontera / sin frontera

compacto / no compacto

Clasificando 1-variedades conexas

Teorema de clasificación de 1-variedades conexas

Existen, hasta por homeomorfismo, exactamente cuatro 1-variedades conexas:

(a) el círculo $\mathbb{S}^1$ *(sin frontera, compacta)*
(b) la recta real $\mathbb{R}$ *(sin frontera, no compacta)*
(c) el intervalo cerrado *(con frontera, compacta)*
(d) el intervalo semi-abierto *(con frontera, no compacta)*

Demostración:

Gale, David. *The Teaching of Mathematics: The Classification of 1-Manifolds: A Take-Home Exam.* Amer. Math. Monthly 94 (1987), no. 2, 170–175.

1-variedades conexas sin frontera

Teorema de clasificación de 1-variedades conexas sin frontera

Existen, hasta por homeomorfismo, exactamente dos 1-variedades conexas sin frontera:

(a) el círculo $\mathbb{S}^1$ *(compacta)*

(b) la recta real $\mathbb{R}$ *(no compacta)*

Sea M una 1-variedad sin frontera. A una colección de abiertos que cubren a M, junto con sus homeomorfismos a $\mathbb{R}$ (o a $(0,1)$) se le llama *un atlas* de M.
Sea

$$\mathcal{A} = \{(\varphi, U) : \varphi : U \to (0,1) \text{ es un homeomorfismo}\}$$

un atlas en una 1-variedad M sin frontera.
A cada $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$ se le llama una *carta local* de M.

1-variedades sin frontera: esbozo de la prueba

Sean $(\varphi, U), (\psi, V) \in \mathcal{A}$ cartas locales de M.

1. Suponga que $U \cap V \neq \varnothing$ y $U \setminus V \neq \varnothing$.
   Demostrar que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $U \cap V$ que converge a $x \in U \setminus V$, entonces la sucesión $\{\psi(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene límite en $\psi(V)$.

   Sugerencia: Usar el hecho de que M es un espacio Hausdorff.

2. Sea $I \subset (0, 1)$ un subintervalo abierto propio. Llamaremos a I *superior* si $I = (a, 1)$ con $0 < a$ y diremos que I es *inferior* si $I = (0, b)$ con $b < 1$. En ambos casos nos referiremos a I como un intervalo *exterior*.
   Demostrar que I es un intervalo exterior si y sólo si existe una sucesión en I que no converge en $(0, 1)$.

1-variedades sin frontera: esbozo de la prueba

3. Decimos que las cartas (φ, U) y (ψ, V) *se traslapan* si $U \cap V \neq \varnothing$, $U \setminus V \neq \varnothing$ y $V \setminus U \neq \varnothing$. Suponga que (φ, U) y (ψ, V) se traslapan y sea W una componente conexa de $U \cap V$. Demostrar que $\varphi(W)$ y $\psi(W)$ son intervalos exteriores.

   Sugerencia: Mostrar primero que $\varphi(W)$ es un subintervalo propio de $\varphi(U) = (0, 1)$. Usando el paso (1) o el hecho de que las 1-variedades sin frontera son localmente conexas, demostrar que $\varphi(W)$ es un intervalo abierto. Por un argumento simétrico se sigue que $\psi(W)$ es un intervalo abierto. Usando la caracterización de (2), construir una sucesión apropiada en $\varphi(W)$ y use (1) para demostrar que $\psi(W)$ es exterior. Concluir que $\varphi(W)$ también es exterior.

4. Use el paso (3) para concluir que $U \cap V$ tiene a lo más dos componentes conexas para cualesquiera dos cartas (φ, U) y (ψ, V).

1-variedades sin frontera: esbozo de la prueba

5. Suponga que M es conexa y que $U \cap V$ tienen dos componentes conexas. Demostrar que M es homeomorfo a S^1.

   Sugerencia:

   i. Sean W_0 y W_1 las componentes conexas de $U \cap V$. Entonces (φ, U) y (ψ, V) se traslapan y podemos asumir que $\varphi(W_0) = (0, a), \varphi(W_1) = (a', 1), \psi(W_0) = (0, b), \psi(W_1) = (b', 1)$.

   ii. Sea S el borde de $[0, 1] \times [0, 1]$. Defina $f : [0, 1] \to S$ como una función lineal a pedazos dada por

   $$f(0) = (0, 0), f(a) = (1, 0), f(a') = (1, 1), f(1) = (0, 1).$$

   Defina $g : [b, b'] \to S$ como una función lineal tal que

   $$g(b) = (0, 0), g(b') = (0, 1).$$

   Finalmente, defina $\eta : U \cup V \to S$ por $\eta(x) = \begin{cases} f \circ \phi(x) & x \in U \\ g \circ \psi(x) & x \in V \setminus U \end{cases}.$

   Demostrar que η es un homeomorfismo de $U \cup V$ y S.

   iii. Usar (ii) para demostrar que $U \cup esV$ es compacto. Usando la conexidad de M concluir que η es un homeomorfismo de M y S.

1-variedades sin frontera: esbozo de la prueba

6. Suponga que (φ, U) y (ψ, V) se traslapan y que $U \cap V$ es conexo. Demuestrar que $U \cap V$ es homeomorfo a $(0, 1)$.

   Sugerencia: Sea $W = U \cap V$. Argumente porqué se puede asumir que $\varphi(W)$ y $\psi(W)$ son intervalos superiores. Sea $\psi(W) = (b, 1)$. Defina $\eta : U \cup V \to (0, 1)$ por
   $$\eta(x) = \begin{cases} \phi(x) & x \in U \\ 1 + b - \psi(x) & x \in V \setminus U. \end{cases}$$

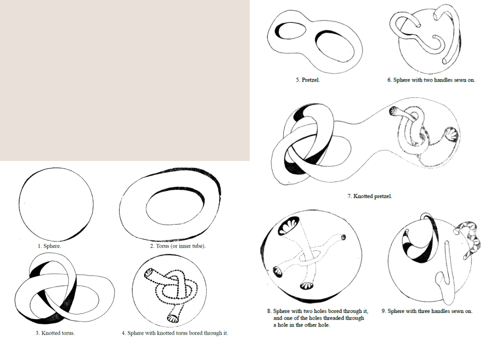
7. Suponga que M es conexa y no compacta. Usar el hecho de que M es segundo numerable para demostrar que M es homeomorfa a $(0, 1)$.

   Sugerencia: Considerar un atlas $\mathcal{A} = \{(\varphi_i, U_i)\}$ contable de M. Definir una sucesión (V_i) anidada de abiertos de manera inductiva: $V_1 = U_1$ y $V_{n+1} = V_n \cup U_k$ donde k es el menor suíndice tal que U_k intersecta V_n. Demuestre que $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = M$. Definir homemomorfimos $\psi_n : V_n \to (0, 1)$ de manera inductiva, empezando por $\psi_1 = \varphi_1$.

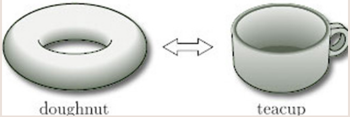
□

Clasificando 2-variedades conexas = superficies

¿Qué clasificar? 2-variedades conexas = superficies
(todas / compactas / compactas sin frontera)



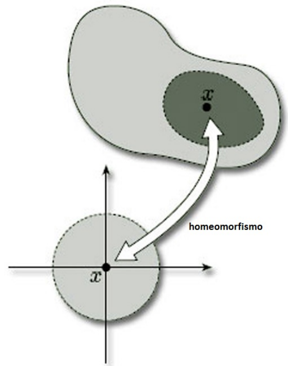
¿Bajo qué criterio? Homeomorfismo



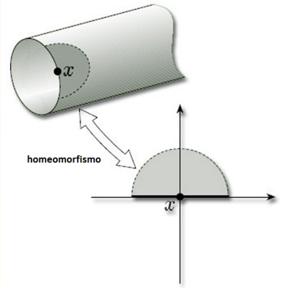
Definición de superficie

Una **2-variedad** o **superficie** Σ es una espacio topológico Hausdorff, conexo y segundo numerable donde para todo $x \in \Sigma$ existe un entorno abierto $U \subset \Sigma$ de x tal que

U es homeomorfo a un disco abierto en $\mathbb{R}^2$



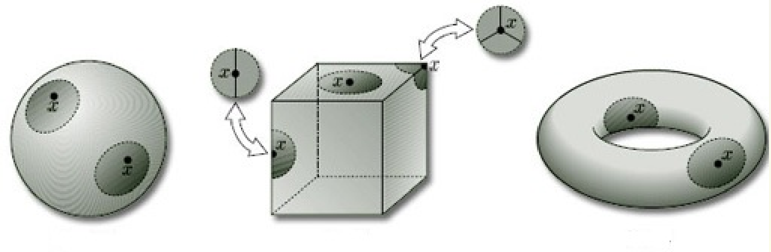
U es homeomorfo a un semidisco abierto en $\mathbb{R}^2$



x es un *punto de la frontera de* Σ.

Ejemplos de superficies

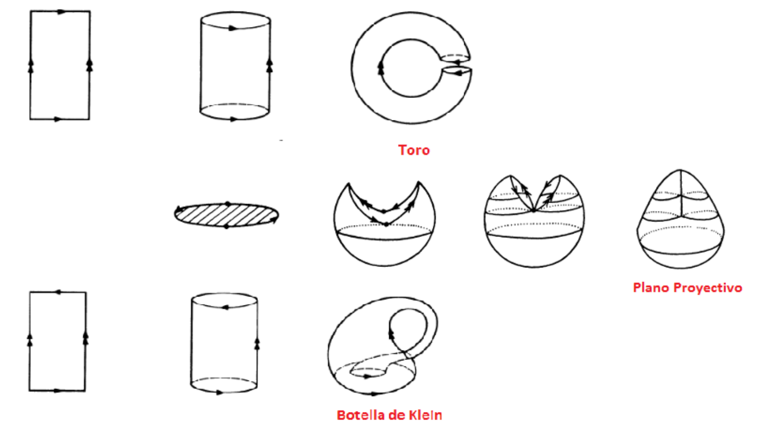
1. El plano $\mathbb{R}^2$
2. El semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$
3. El cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$
4. El disco abierto $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
5. El disco cerrado $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$



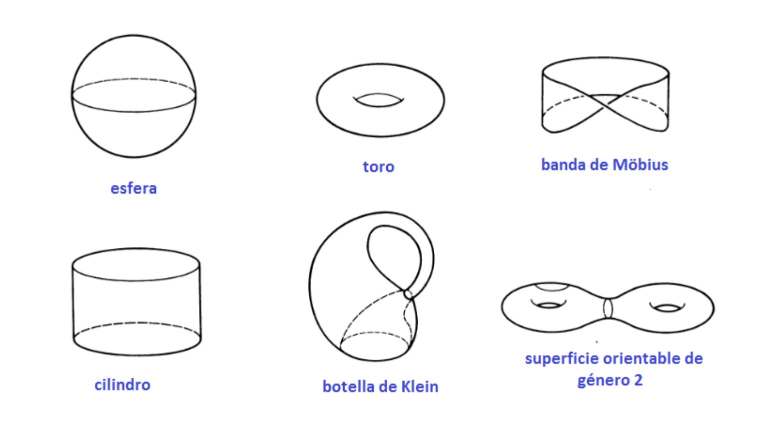
Construcción de superficies: polígonos y pegados

P un polígono (subespacio de $\mathbb{R}^2$)
$\sim$ identifica lados del polígono P

Superficie compacta: $P/\sim$ con la topología cociente

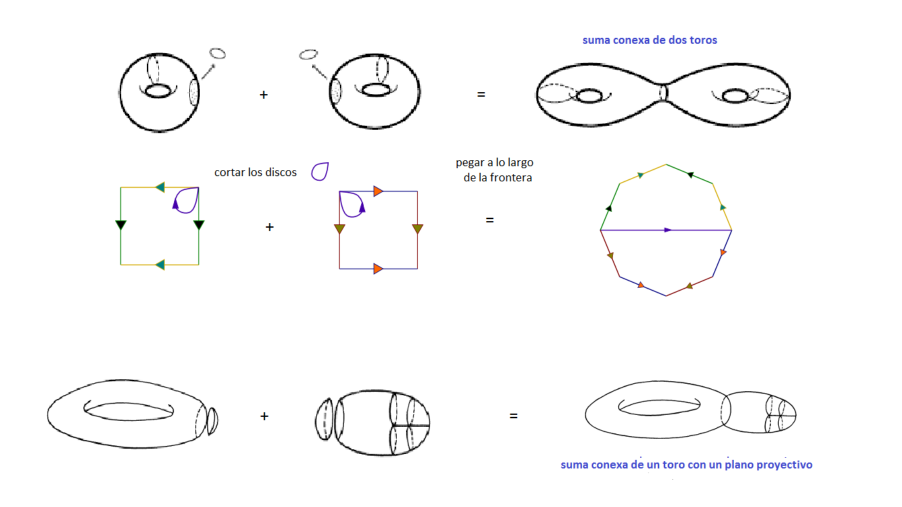


Ejemplos de superficies



Más superficies: sumas conexas

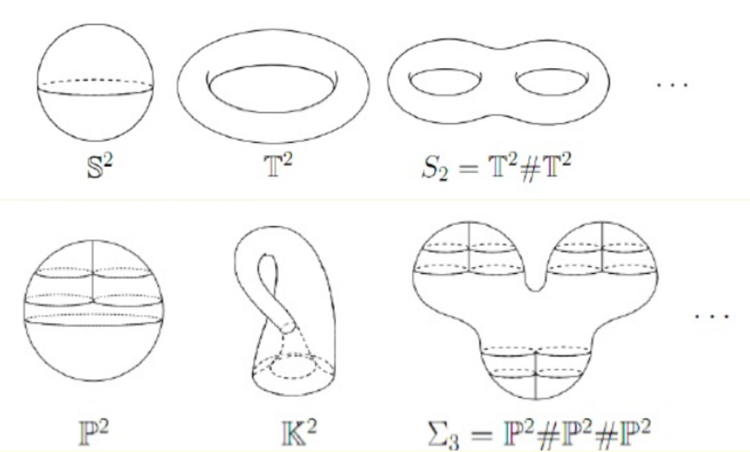
$$\Sigma_1 \# \Sigma_2 = \frac{\Sigma_1 \setminus \operatorname{int}(D_1) \bigsqcup \Sigma_2 \setminus \operatorname{int}(D_2)}{\sim}$$



Teorema de clasificación de superficies cerradas

Teorema. Toda superficie cerrada Σ (compacta y sin frontera) es homeomorfa a la esfera o a una suma conexa de un número finito de toros con planos proyectivos:

$$\Sigma \cong S^2 \# T \# \cdots \# T \# \mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2$$



Clasificación de superficies: breve historia

Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.

G.H. HARDY

- LISTING (1802-1882) Palabra “topologie” (1847); banda de Möbius
- RIEMANN (1826-1866) Reconoció la importanciade la topología en su trabajo de variable compleja; noción de superficie simplemente conexa
- MÖBIUS (1790-1868) Primer enunciado del Teorema de clasificación de superficies (1863); género y orientabilidad de una superficie; banda de Möbius
- JORDAN (1838-1922) Enunciado del Teorema de clasificación para superficies orientables (1866); nociones de homeomorfismo y género
- DYCK (1856-1934) Enuncia Teorema de clasificación para superficies orientables y no orientables (1888); invariantes: característica de Euler, # curvas frontera, orientabilidad; noción de superficie normal

Clasificación de superficies: breve historia

- DEHN(1878-1952)–HEEGARD(1871-1948) Primer enunciado riguroso del Teorema de clasificación de superficies (1907)
- BRAHANA (1895-1972) Primera prueba completa del Teorema de clasificación de superficies triangulables (1921)
- RADÓ (1895-1965) Toda superficie compacta es triangulable (1925)

FUENTE: J. Gallier and D. Xu, *A guide to the classification theorem for compact surfaces* GEOMETRY AND COMPUTING Volume 9, Springer (2013)

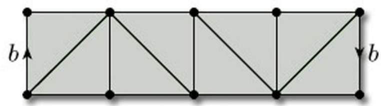
La prueba que veremos:

ZEEMAN (1966) An Introduction to Topology: The Classification theorem for Surfaces, Mathematics Institute University of Warwick Coventry

M. A. ARMSTRONG, Basic Topology, Springer Undergraduate texts in mathemathics

Triangulaciones

Triangulaciones: *herramienta para clasificar y calcular*



net of triangles on Möbius band

Idea: “cortar” espacios en subespacios más sencillos (triángulos)

Sean $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^k$ en posición general:

0-simplejo / vértice v_0

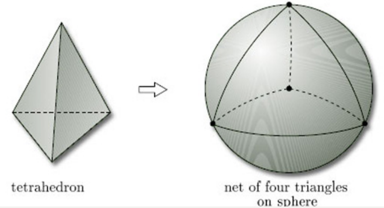
1-simplejo / lado $\{t_0 v_0 + t_1 v_1 : t_0, t_1 \geq 0, t_0 + t_1 = 1\}$

2-simplejo / triángulo $\{t_0 v_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2 : t_0, t_1, t_2 \geq 0, t_0 + t_1 + t_2 = 1\}$

Complejo simplicial de dimensión 2: colección K de simplejos, incluye todas las caras y las intersecciones entre dos simplejos en K ocurren en una cara común.

$|K|$: considerar al poliedro K como subespacio topológico de $\mathbb{R}^k$.

Triangulaciones



Una **triangulación** de una superficie Σ: un complejo simplicial K y un homeomorfismo $h : |K| \to \Sigma$.

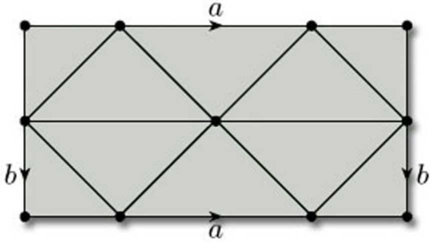
Propiedades:

(i) Todo par de vértices en K puede conectarse por un camino de lados

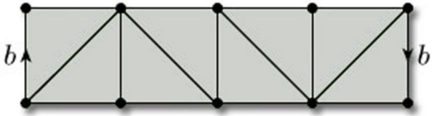
(ii) Cualquier lado es cara de exactamente dos triángulos (uno si la superficie tiene frontera)

(iii) Un vértice v es el vértice de por lo menos tres triángulos y todos los triángulos que tienen a v como vértice se acomodan en círculo.

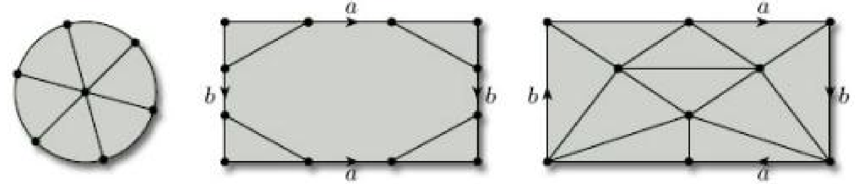
Ejemplos de triangulaciones



net of triangles on torus



net of triangles on Möbius band



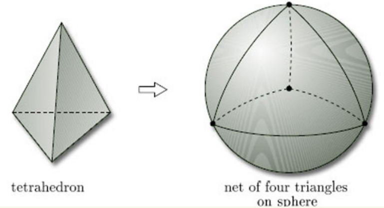
(a) disc (b) torus (c) projective plane

Teorema (Radó 1920s) Toda superficie compacta es triangulable.

Característica de Euler

Característica de Euler: Sea $h : |K| \to \Sigma$ una triangulación de una superficie Σ compacta

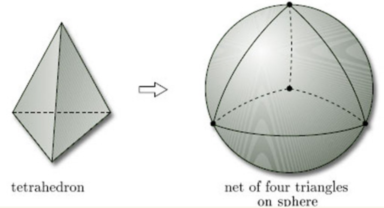
$$\chi(\Sigma) = \#\text{vértices - }\#\text{lados + }\#\text{triángulos}$$



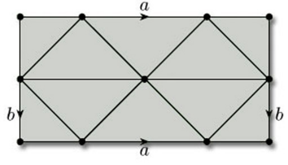
Característica de Euler

Característica de Euler: Sea $h : |K| \to \Sigma$ una triangulación de una superficie Σ compacta

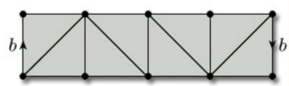
$$\chi(\Sigma) = \#\text{vértices - }\#\text{lados + }\#\text{triángulos}$$



$\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$



net of triangles on torus

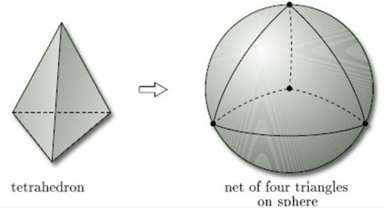


net of triangles on Möbius band

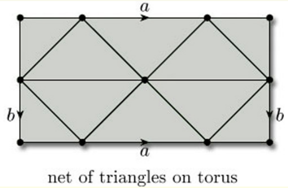
Característica de Euler

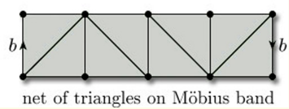
Característica de Euler: Sea $h : |K| \to \Sigma$ una triangulación de una superficie Σ compacta

$$\chi(\Sigma) = \#\text{vértices - }\#\text{lados + }\#\text{triángulos}$$



$\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$





$\chi(T) = 5 - 15 + 10 = 0$

$\chi(B) = 8 - 16 + 8 = 0$

Característica de Euler

Teorema. La característica de Euler es independiente de la triangulación.

Prueba: subdivisión baricéntrica.

Teorema. La característica de Euler es un invariante de homeomorfismo.

Prueba: Homología

Proposición. $\chi(\Sigma_1 \# \Sigma_2) = \chi(\Sigma_1) + \chi(\Sigma_2) - 2$

$$\chi(T^2 \# T^2) = ?$$

$$\chi(S^2 \# T^2) = ?$$

$$\chi(\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2) = ?$$

Caracterísitica de Euler de gráficas

Para Γ una gráfica finita

$$\chi(\Gamma) = \text{vértices} - \text{lados}$$

Γ es un *árbol* si no tiene ciclos

Lema (Característica de Euler de gráficas). Sea Γ una gráfica conexa finita. Entonces

a) $\chi(\Gamma) \leq 1$

b) $\chi(\Gamma) = 1$ si y sólo si Γ es un árbol.

Característica de Euler de superficies

Lema (Característica de Euler de superficies). Sea Σ una superfice cerrada, entonces

a) $\chi(\Sigma) \leq 2$

b) $\chi(\Sigma) = 2$ si y sólo si Σ es homeomorfa a S^2

c) Si $\chi(\Sigma) < 2$, entonces existe un curva cerrada simple en Σ que NO separa a la superficie.

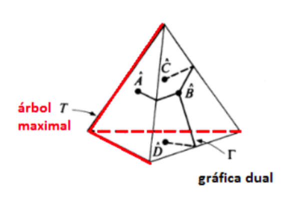
Curva cerrada simple: imagen de un encaje $\gamma : S^1 \hookrightarrow \Sigma$

Teorema de la curva de Jordan. Toda curva cerrada simple del plano divide al plano en dos componentes conexas disjuntas que tienen a la curva como frontera comn. Una de estas componentes est acotada (el interior de la curva) y la otra es no acotada y se le llama exterior.

Prueba del Lema

Escoger triangulación de Σ con v vértices, l aristas y t triángulos.
G: vértices y lados de la triangulación
T: un árbol maximal de G

Definimos Γ la **gráfica dual** de T:



$V(\Gamma)$ = Triángulos de la triangulación
$E(\Gamma)$= Aristas de la gráfica dual
Dos vértices $v_1, v_2 \in V(\Gamma)$ se unen por una arista en $E(\Gamma)$ si los triángulos correspondientes a v_1 y v_2 comparten un lado que no está en T.

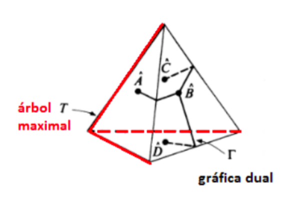
Ejercicio: Γ es una gráfica conexa.

$|V(T)| = v$ $\qquad |V(\Gamma)| = t$ $\qquad |E(\Gamma)| + |E(T)| = l$

Prueba del Lema

Escoger triangulación de Σ con v vértices, l aristas y t triángulos.
G: vértices y lados de la triangulación
T: un árbol maximal de G

Definimos Γ la **gráfica dual** de T:



$V(\Gamma)$ = Triángulos de la triangulación
$E(\Gamma)$= Aristas de la gráfica dual
Dos vértices $v_1, v_2 \in V(\Gamma)$ se unen por una arista en $E(\Gamma)$ si los triángulos correspondientes a v_1 y v_2 comparten un lado que no está en T.

Ejercicio: Γ es una gráfica conexa.

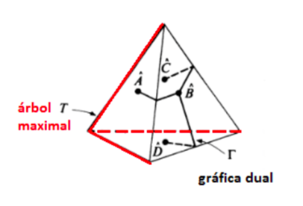
$|V(T)| = v$ $\qquad |V(\Gamma)| = t$ $\qquad |E(\Gamma)| + |E(T)| = l$

$$\text{(a) } \chi(\Sigma) = \chi(T) + \chi(\Gamma) \leq 1 + 1 = 2$$

Prueba del Lema

Escoger triangulación de Σ con v vértices, l aristas y t triángulos.
G: vértices y lados de la triangulación
T: un árbol maximal de G

Definimos Γ la **gráfica dual** de T:



$V(\Gamma)$ = Triángulos de la triangulación
$E(\Gamma)$= Aristas de la gráfica dual
Dos vértices $v_1, v_2 \in V(\Gamma)$ se unen por una arista en $E(\Gamma)$ si los triángulos correspondientes a v_1 y v_2 comparten un lado que no está en T.

Ejercicio: Γ es una gráfica conexa.

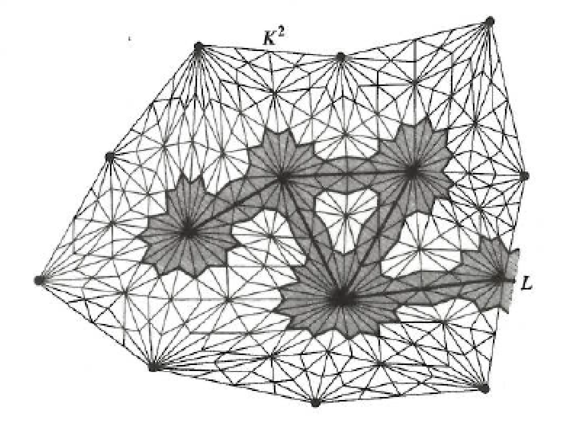
$|V(T)| = v$ $\qquad |V(\Gamma)| = t$ $\qquad |E(\Gamma)| + |E(T)| = l$

$$\text{(a) } \chi(\Sigma) = \chi(T) + \chi(\Gamma) \leq 1 + 1 = 2$$

(b) $\chi(\Sigma) = \chi(T) + \chi(\Gamma) = 2$ si y sólo si $\chi(\Gamma) = 1$ si y sólo si Γ es árbol.

“Ensanchamientos” de subgráficas o caminos

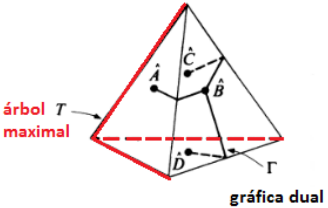
Si L es una subgráfica de la triangulación podemos “ensancharla”

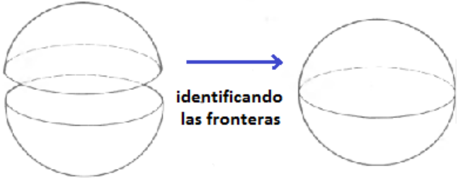


- El “ensanchamiento” de un árbol es homeomorfo a un disco $\mathbb{D}^2$.
- El “ensanchamiento” de un camino poligonal cerrado y simple (sin autointersecciones) es homeomorfo al cilindro o a la banda de Möbius.

Prueba del Lema

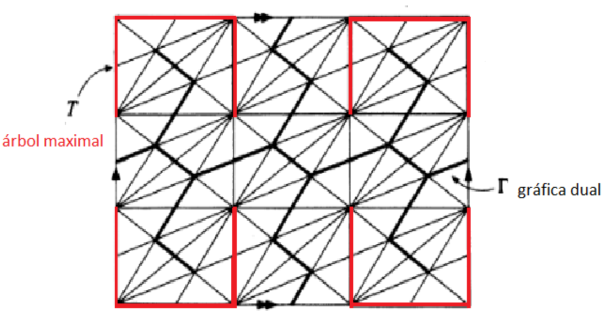
(b) $\chi(\Sigma) = \chi(T) + \chi(\Gamma) = 2$ si y sólo si $\chi(\Gamma) = 1$ si y sólo si Γ es árbol.





Característica de Euler de superficies

(c) $\chi(\Sigma) = \chi(T) + \chi(\Gamma) < 2$, entonces Γ es una gráfica con ciclos.



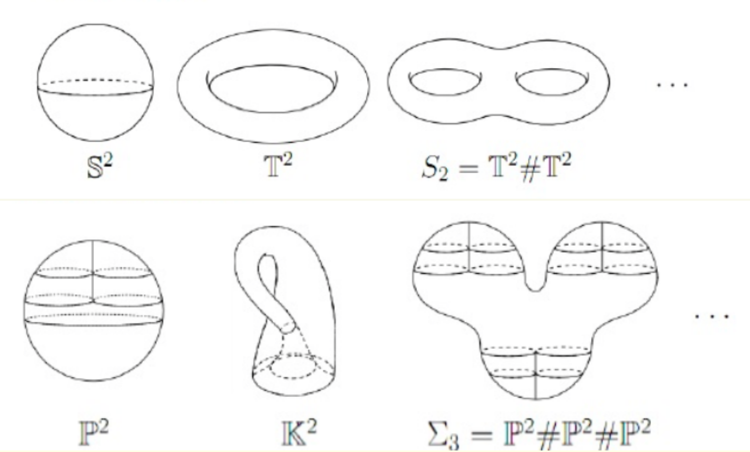
TRIANGULACIÓN DEL TORO

Entonces existe un encaje $\gamma : S^1 \hookrightarrow \Gamma \subseteq \Sigma$ (el ciclo)
Demostrar que $\Sigma - \gamma$ es conexa. $\square$

Teorema de clasificación de superficies cerradas

Teorema. Toda superficie cerrada Σ (compacta y sin frontera) es homeomorfa a la esfera o a una suma conexa de un número finito de toros con planos proyectivos:

$$\Sigma \cong S^2 \# T \# \cdots \# T \# \mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2$$



La prueba se Zeeman

Prueba por inducción en la característica de Euler $\chi(\Sigma) \leq 2$

Base de inducción: $\chi(\Sigma) = 2$ si y sólo si Σ es homeomorfa a S^2

Hipótesis de inducción: Sea Σ superficie cerrada, con $\chi(\Sigma) < 2$.
Si Σ' es superficie y $\chi(\Sigma') > \chi(\Sigma)$, entonces

$$\Sigma' \cong \text{ suma conexa de toros y planos proyectivos}$$

Por Lema (b):
existe un curva γ cerrada simple en Σ que NO separa la superficie

$N(\gamma)$= "Ensanchamiento" de γ :

(a) $N(\gamma)$ es homeomorfo a un cilindro,
(b) $N(\gamma)$ es homemorfo a una banda de Möbius

Hagamos "cirugía" en la superficie:

"cortar pedazos de la superficie y reemplazarlos por otros"

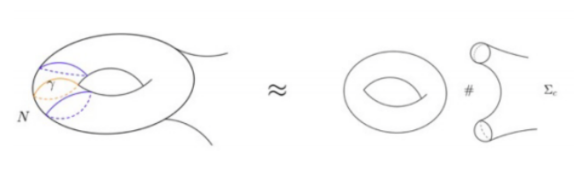
La prueba de Zeeman. Caso (a)

$N(\gamma)$ es homeomorfo al interior de un cilindro

Cortar: $\Sigma_\gamma := \Sigma - int(N(\gamma))$
es una superficie conexa con dos componentes frontera

Reemplazar:
$\hat{\Sigma}_\gamma := \Sigma_\gamma$ + Discos que "tapan" las dos componentes frontera

$$\Sigma \cong T^2 \# \hat{\Sigma}_\gamma$$



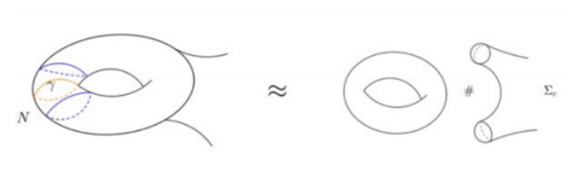
La prueba de Zeeman. Caso (a)

$N(\gamma)$ es homeomorfo al interior de un cilindro

Cortar: $\Sigma_\gamma := \Sigma - int(N(\gamma))$
es una superficie conexa con dos componentes frontera

Reemplazar:
$\hat{\Sigma}_\gamma := \Sigma_\gamma$ + Discos que “tapan” las dos componentes frontera

$$\Sigma \cong T^2 \# \hat{\Sigma}_\gamma$$

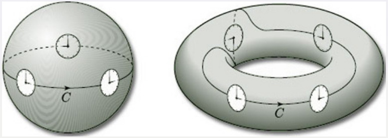


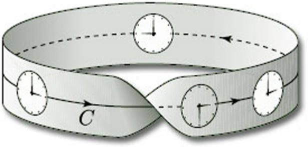
Luego, $\chi(\hat{\Sigma}_\gamma) > \chi(\Sigma)$ y por hipótesis de inducción

$$\Sigma \cong T^2 \# \text{ suma conexa de toros y planos proyectivos}$$

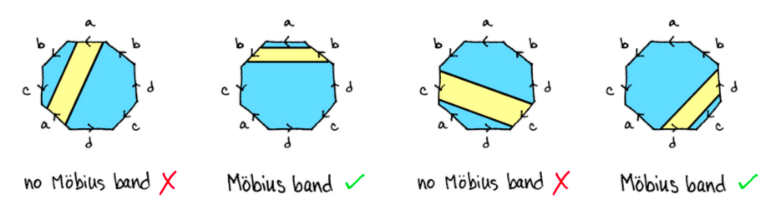
Caso (b): $\Sigma \cong \mathbb{R}P^2 \#$ suma conexa de toros y proyectivos $\square$

Orientabilidad





Una superficie que NO contiene una banda de Möbius es **orientable**
Una superficie que SÍ contiene una banda de Möbius es **no orientable**

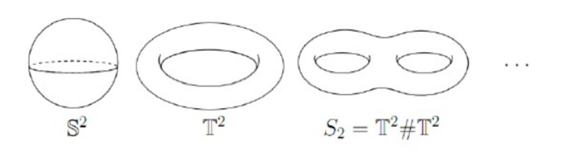


Ser orientable o no orientable es un invariante de homeomorfismo.

Teorema de clasificación de superficies cerradas

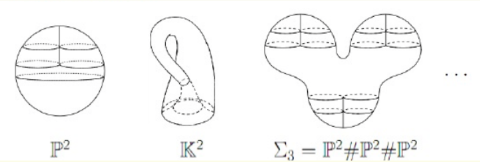
Sea Σ una superficie cerrada (compacta y sin frontera). Entonces Σ es homeomorfa a una y sólo una de las siguientes superficies:

- La esfera si $\chi(\Sigma) = 2$
- Una suma conexa de g toros si Σ es orientable



$g = 1 - \chi(\Sigma)/2$

- Una suma conexa de h planos proyectivos si Σ es no orientable



$h = 2 - \chi(\Sigma)$

característica de Euler + orientabilidad: invariantes completos.
grupo fundamental: tenemos representantes de clases distintas

Otros teoremas de clasificación

- **Clasificación de superficies orientables con frontera.** Toda superficie compacta orientable es homeomorfa a $\Sigma_{g,r}$ para ciertos $g, r \geq 0$.
- **Clasificación de superficies compactas.** Dos superficies compactas son homeomorfas si y sólo si tienen el mismo número de componentes frontera, la misma característica de Euler y son ambas orientables o ambas no orientables.
- Clasificación de superficies triangulables no compactas.
- Descomposición prima de 3-variedades compactas orientables
- *Conjetura de Poincaré (1904):* Si una 3-variedad compacta M tiene la propiedad de que toda curva cerrada simple puede deformarse continuamente a un punto, entonces M es homeomorfa a la esfera S^3.

Homemorfismos de superficies

"las simetrías de las superficies"

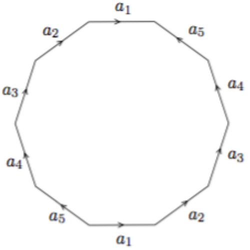


Figure 2.2 Rotation by $2\pi/10$ gives an order 10 element of $\mathrm{Mod}(S_2)$.

Figure 2.3 The rotation by π about the indicated axis is a hyperelliptic involution.

Figure 2.1 An order 5 element of $\mathrm{Mod}(S_5)$.

Grupos de homeomorfismos:

$$(\mathrm{Homeo}(\Sigma) = \{f : \Sigma \to \Sigma \colon f \text{ es homeomorfismo}\}, \text{composición})$$

Grupos modulares de superficies

$$Mod(\Sigma) = \text{Homeo}^+(\Sigma)/\text{Homeo}_0^+(\Sigma)$$

¿Son estos grupo conocido? ¿Lo hemos visto en otros conextos?

Grupos modulares de superficies

$$Mod(\Sigma) = \text{Homeo}^+(\Sigma)/\text{Homeo}_0^+(\Sigma)$$

¿Son estos grupo conocido? ¿Lo hemos visto en otros conextos?

$Mod(\mathbb{D}_2) = \{e\}$

$Mod(\Sigma_{0,1}^n)$= grupo de trenzas

$Mod(\Sigma_{0,2}) = \mathbb{Z}$

$Mod(T) =$SL$(2, \mathbb{Z})$

Son discretos, numerables, finitamente generados y presentados

Grupos modulares de superficies

$$Mod(\Sigma) = \text{Homeo}^+(\Sigma)/\text{Homeo}_0^+(\Sigma)$$

¿Son estos grupo conocido? ¿Lo hemos visto en otros conextos?

$Mod(\mathbb{D}_2) = \{e\}$

$Mod(\Sigma_{0,1}^n)$= grupo de trenzas

$Mod(\Sigma_{0,2}) = \mathbb{Z}$

$Mod(T) =$SL$(2, \mathbb{Z})$

Son discretos, numerables, finitamente generados y presentados

Pregunta abierta:
¿Es $Mod(\Sigma)$ lineal (un grupo de matrices) cuando el género de Σ es mayor que 2?

Referencias

- Rafael López, *¿Como un topológo clasifica las letras del alfabeto?* MISCELÁNEA MATEMÁTICA **61** (2015)
- D. Gale, *The Classification of 1-Manifolds: A Take-Home Exam,* The American Mathematical Monthly, Vol. 94, No. 2 (1987)
- E.C. Zeeman, *An Introduction to Topology: The Classification theorem for Surfaces,* Mathematics Institute University of Warwick Coventry (1966)
- M. A. Armstrong, *Basic Topology* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer
- P. Andrews, *The Classification of Surfaces,* The American Mathematical Monthly, Vol. 95, No. 9 (1988)
- A. Putman, *A quick proof of the classification of surfaces* http://www.math.rice.edu/ andyp/notes/ClassificationSurfaces.pdf
- J. Gallier and D. Xu, *A guide to the classification theorem for compact surfaces,* Geometry and Computing Volume 9, Springer (2013)
- *Surfaces.* Notes on The Open University.
- A. Hatcher, *The Kirby torus trick for surfaces*, preprint 2013, arXiv:1312.3518

Más Referencias

- I. Richards, On the classification of Noncompact Surfaces, Transactions of the A.M.S. (1963). p. 259–269.
- J. Milnor,*Towards the Poincaré Conjecture and the Classification of 3-Manifolds,* Notices A.M.S. (November 2003) 1226–1233.
- A. Hatcher, *Notes on Basic 3-Manifold Topology*. https://www.math.cornell.edu/ hatcher/3M/3M.pdf
- J. R. Munkres. *Topology: a first course.* Prentice-Hall, Inc. 1975.
- A. Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- B. Farb and D. Margalit, *A primer on mapping class groups,* Princeton Mathematical Series.
- Y. Minsky, *A brief introduction to mapping class groups,* Moduli spaces of Riemann Surfaces, 5-44, IAS/Park City Math. Ser., 20. Amer. Math. Soc. (2013).
- *Office hours with a geometric group theorist,* Princeton University Press (2017). Edited by Matt Clay & Dan Margalit

El “comercial”

Instituto de Matemáticas, Unidad Oaxaca

https://paginas.matem.unam.mx/oaxaca/

Posibles becas para tesis de licenciatura y de maestría
rita@im.unam.mx