Mini-curso Topología de Superficies

0. **Clasificación de letras:** Clasifica las letras mayúsculas en fuente Sans Serif TEX

A B C D E F G H I J K L M N Ñ O P Q R S T U V W X Y Z

como subespacios del plano $\mathbb{R}^2$, hasta por homeomorfismo.

Clasificación de 1-variedades sin frontera

Una 1-*variedad* M es un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable tal que M puede ser cubierto por conjuntos abiertos homeomorfos a $\mathbb{R}$ o a $(0, 1]$. Si sólo se tienen abiertos homeomorfos a $\mathbb{R}$ decimos que M es una 1-*variedad sin frontera*.

Sea M una 1-variedad sin frontera. A una colección de abiertos que cubren a M, junto con sus homeomorfismos a $\mathbb{R}$ se le llama *un atlas* de M.

Ejemplos de 1-variedades sin frontera:

(i) Demuestre que $\mathbb{R}$ y S^1 son 1-variedades conexas sin frontera.

(ii) Encuentra un homeomorfismo de la recta real $\mathbb{R}$ al intervalo abierto $(0, 1)$. Demuestre que cualesquiera dos intervalos abiertos son homeomorfos.

Teorema de clasificación de 1-variedades conexas. Existen, hasta por homeomorfismo, exactamente cuatro 1-variedades conexas:

(a) el círculo $\mathbb{S}^1$ *(sin frontera, compacta)*

(b) la recta real $\mathbb{R}$ *(sin frontera, no compacta)*

(c) el intervalo cerrado *(con frontera, compacta)*

(d) el intervalo semi-abierto *(con frontera, no compacta)*

Demuestre el Teorema de clasificación de 1-variedades conexas sin frontera siguiendo los pasos sugeridos por:

Gale, David. *The Teaching of Mathematics: The Classification of 1-Manifolds: A Take-Home Exam.* Amer. Math. Monthly 94 (1987), no. 2, 170–175.

Sea

$$\mathcal{A} = \{(\varphi, U) : \varphi : U \to (0, 1) \text{ es un homeomorfismo}\}$$

un atlas en una 1-variedad M sin frontera y sean $(\varphi, U), (\psi, V) \in \mathcal{A}$ (cartas locales de M). Demuestre:

1. Suponga que $U \cap V \neq \varnothing$ y $U \setminus V \neq \varnothing$. Demuestre que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $U \cap V$ que converge a $x \in U \setminus V$, entonces la sucesión $\{\psi(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene límite en $\psi(V)$.

   Sugerencia: Usar el hecho de que M es un espacio Hausdorff.

2. Sea $I \subset (0, 1)$ un subintervalo abierto propio. Llamaremos a I *superior* si $I = (a, 1)$ con $0 < a$ y diremos que I es *inferior* si $I = (0, b)$ con $b < 1$. En ambos casos nos referiremos a I como un intervalo *exterior*. Demuestre que I es un intervalo exterior si y sólo si existe una sucesión en I que no converge en $(0, 1)$.

3. Decimos que las cartas (φ, U) y (ψ, V) *se traslapan* si $U \cap V \neq \varnothing$, $U \setminus V \neq \varnothing$ y $V \setminus U \neq \varnothing$. Suponga que (φ, U) y (ψ, V) se traslapan y sea W una componente conexa de $U \cap V$. Demuestre que $\varphi(W)$ y $\psi(W)$ son intervalos exteriores.

   Sugerencia: Muestre primero que $\varphi(W)$ es un subintervalo propio de $\varphi(U) = (0,1)$. Usando el paso (1) o el hecho de que las 1-variedades sin frontera son localmente conexas, demuestre que $\varphi(W)$ es un intervalo abierto. Por un argumento simétrico se sigue que $\psi(W)$ es un intervalo abierto. Usando la caracterización de (2), construya una sucesión apropiada en $\varphi(W)$ y use (1) para demostrar que $\psi(W)$ es exterior. Concluya que $\varphi(W)$ también es exterior.

4. Use la afirmación anterior para concluir que $U \cap V$ tiene a lo más dos componentes conexas para cualesquiera dos cartas (φ, U) y (ψ, V).

5. Suponga que M es conexa y que $U \cap V$ tienen dos componentes conexas. Demuestre que M es homeomorfo a S^1.

   Sugerencia:

   i. Sean W_0 y W_1 las componentes conexas de $U \cap V$. Demuestre que (φ, U) y (ψ, V) se traslapan. Argumente porqué podemos asumir que $\varphi(W_0)$ y $\psi(W_0)$ son inferiores y $\varphi(W_1)$ y $\psi(W_1)$ son superiores.

   ii. Escriba
   $$\varphi(W_0) = (0,a), \quad \varphi(W_1) = (a', 1) \qquad\qquad \psi(W_0) = (0,b), \quad \psi(W_1) = (b', 1).$$
   Sea S la frontera de $[0,1] \times [0,1]$. Defina $f : [0,1] \to S$ como una función lineal a pedazos dada por
   $$f(0) = (0,0), f(a) = (1,0), f(a') = (1,1), f(1) = (0,1).$$
   Defina $g : [b, b'] \to S$ como una función lineal tal que
   $$g(b) = (0,0), g(b') = (0,1).$$
   Finalmente, defina $\eta : U \cup V \to S$ por $\eta(x) = \begin{cases} f \circ \phi(x) & x \in U \\ g \circ \psi(x) & x \in V \setminus U \end{cases}$.
   Demuestre que η es un homeomorfismo de $U \cup V$ y S.

   iii. Use (ii) para demostrar que $U \cup esV$ es compacto. Usando la conexidad de M concluya que η es un homeomorfismo de M y S.

6. Suponga que (φ, U) y (ψ, V) se traslapan y que $U \cap V$ es conexo. Demuestre que $U \cap V$ es homeomorfo a $(0,1)$.

   Sugerencia: Sea $W = U \cap V$. Argumente porqué se puede asumir que $\varphi(W)$ y $\psi(W)$ son intervalos superiores. Sea $\psi(W) = (b,1)$. Defina $\eta : U \cup V \to (0,1)$ por
   $$\eta(x) = \begin{cases} \phi(x) & x \in U \\ 1 + b - \psi(x) & x \in V \setminus U. \end{cases}$$

7. Suponga que M es conexa y no compacta. Use el hecho de que M es segundo numerable para demostrar que M es homeomorfa a $(0,1)$.

   Sugerencia: Considere un atlas $\mathcal{A} = \{(\varphi_i, U_i)\}$ contable de M. Defina una sucesión (V_i) anidada de abiertos de manera inductiva: $V_1 = U_1$ y $V_{n+1} = V_n \cup U_k$ donde k es el menor suíndice tal que U_k intersecta V_n. Demuestre que $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = M$. Defina homemomorfimos $\psi_n : V_n \to (0,1)$ de manera inductiva, empezando por $\psi_1 = \varphi_1$.